FLA
K1

Probeklausur zum Ferienkurs Lineare Algebra

1\. a) <u>falsch</u>, denn $f(\lambda x) = \lambda x + 1 \neq \lambda \cdot f(x)$

b) <u>falsch</u>, denn $f(1) = 1 = f(-1)$

c) <u>falsch</u>, denn $z = 2$ hat kein Inverses $(\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z})$

d) <u>richtig</u>, denn $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) <u>falsch</u>, denn $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow{\text{erste Zeile}}$ $\underline{\lambda = 4}$, $\xrightarrow{\text{zweite Zeile}}$ $\underline{\mu = 0}$

aber dann dritte Zeile: $1 \neq 4 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 4$

f) <u>falsch</u>, denn A ist lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ in den $\mathbb{R}^2$, d.h. $\text{Bild}(A) \subseteq \mathbb{R}^2$, d.h. $\text{Rang}(A) = \dim \text{Bild}(A) \leq 2$.

g) $\det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 4 =$
$= 4 + 8 + 4 - 8 - 2 - 8 = -2$ ✓

<u>richtig!</u>

h) <u>falsch</u>, denn A ist keine quadratische Matrix!

i) <u>richtig</u>, denn $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{152}$ ist linear und damit ist $\text{Bild}(f)$ immer ein UVR! Die Angabe $f(\pi + 42) \neq 0$ ist irrelevant!

j) <u>richtig</u>, denn $\left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = 4 \cdot 2 + 1 \cdot (-4) + (-1) \cdot 4 =$
$= \underline{0}$

FLA
K2

2\. a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A_α invertierbar?

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & 2 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir verwenden: A_α invertierbar $\Leftrightarrow \det(A_\alpha) \neq 0$

Entwicklung nach der <u>3. Spalte</u>

$$\det(A_\alpha) \overset{\downarrow}{=} -\alpha \cdot \det\begin{pmatrix} -8 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\alpha\left(0+0+0-16\alpha+16-0\right) =$$

$$= 16\alpha(\alpha-1) \overset{?}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \underline{\alpha = 0} \text{ oder } \underline{\alpha = 1}$$

$\Rightarrow$ Für $\alpha \notin \{0, 1\}$ ist A_α invertierbar.

b) $\mathrm{Kern}(A_1)$ wird mittels Gauß bestimmt: $(A_1 v \overset{!}{=} 0)$

$$\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sei also $\underline{v_1 = \lambda \in \mathbb{R}}$ beliebig

Zeile 3: $\rightarrow \underline{v_2 = -\lambda}$

Zeile 2: $\rightarrow \underline{v_4 = 4\lambda}$

Zeile 1: $\rightarrow \underline{v_3 = 4\lambda}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathrm{Kern}(A_1) = \left\{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}}}$$

FLA
K3

3. $SL(n, \mathbb{R}) = \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \det(A) = 1 \}$

a) Beh: $SL(n, \mathbb{R})$ ist bzgl. „·" eine Gruppe.

Bew: Wir weißen Abgeschlossenheit und die Axiome nach:

0) Seien $A, B \in SL(n, \mathbb{R})$. zu zeigen: $A \cdot B \in SL(n, \mathbb{R})$

d.h. $\det(AB) \overset{?}{=} 1$

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 1 \cdot 1 = 1$$

i) neutrales Element: $E_n \in SL(n, \mathbb{R})$, da $\det E_n = 1$

ii) inverses Element: Für jedes $A \in SL(n, \mathbb{R})$ gibt es A^{-1}, da $\det(A) = 1 \neq 0$ gilt.

Außerdem $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = (1)^{-1} = 1$, d.h. $A^{-1} \in SL(n, K)$.

iii) Assoziativität: Die Matrizenmultiplikation „·" ist immer assoziativ

b) Gesucht ist $A, B \in SL(2, \mathbb{R})$ mit $A + B \notin SL(2, \mathbb{R})$.

z.B. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 1$, $\det(B) = 1$, $\det(A+B) = 2 \neq 1$

oder: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 1$, $\det(B) = 1$, $\det(A+B) = 0 \neq 1$

FLA
K4

4. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} x+1 \\ x-1 \end{pmatrix}$

a) f ist injektiv, denn angenommen

$f(x) = \begin{pmatrix} x+1 \\ x-1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} f(y) = \begin{pmatrix} y+1 \\ y-1 \end{pmatrix}$, so muss gelten

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I)} & x+1 = y+1 \Leftrightarrow x = y \\ \text{II)} & x-1 = y-1 \Leftrightarrow x = y \end{array}\right\} \Rightarrow \text{d.h. } \underline{x = y}$$

b) f ist nicht surjektiv, denn $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \neq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I)} & 2 = x+1 \Rightarrow x = 1 \\ \text{II)} & 2 = x-1 \Rightarrow x = 3 \end{array}\right\} ↯$$

c) $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto g(x,y) = x^2 + y^2$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \quad h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h = g \circ f, \quad$ d.h. $\underline{V = W = \mathbb{R}}$

Es gilt: $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) =$

$$= g\left(\begin{pmatrix} x+1 \\ x-1 \end{pmatrix}\right) = (x+1)^2 + (x-1)^2$$

$$= \underline{2x^2 + 2}$$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{h(0) = 2}}$

Es ist $h(x) = 10 \Leftrightarrow 2x^2 = 8 \Leftrightarrow \underline{\underline{x \in \{\pm 2\}}}$

FLA
K5

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ soll diagonalisiert werden.

i) Charakteristisches Polynom:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -2-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= (1-\lambda)(-2-\lambda)(-2-\lambda) + 4 + 4 \\
&\quad - 4(-2-\lambda) - (1-\lambda) - 4(-2-\lambda) = \\
&= (1-\lambda)(4 + 4\lambda + \lambda^2) + 8 \\
&\quad + 8 + 4\lambda - 1 + \lambda + 8 + 4\lambda = \\
&= 4 + 4\lambda + \lambda^2 - 4\lambda - 4\lambda^2 - \lambda^3 + 8 \\
&\quad + 16 + 9\lambda - 1 = \\
&= \underline{\underline{-\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 27}}
\end{aligned}$$

ii) Durch „Raten": $\underline{\lambda_1 = 3}$ $\rightarrow$ Polynomdivision

$$\begin{array}{l}
(-\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 27) : (\lambda - 3) = \underline{\underline{-\lambda^2 - 6\lambda - 9}} \\
\underline{-(-\lambda^3 + 3\lambda^2)} \\
\quad -6\lambda^2 + 9\lambda \\
\quad \underline{-(-6\lambda^2 + 18\lambda)} \\
\qquad -9\lambda + 27 \\
\qquad \underline{-9\lambda + 27} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Binomische Formel $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 3)(\lambda + 3)^2}}$

d.h. wir haben zwei verschiedene Eigenwerte

$\underline{\lambda_1 = 3}$, $\alpha_1 = 1$ (einfach)

$\underline{\lambda_2 = -3}$, $\alpha_2 = 2$ (zweifach)

FLA
K6

iii) Wir berechnen Eigenraum zu $\lambda_1 = 3$:

$$E_A(3) = \operatorname{Kern}(A - 3E_3) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Gauß $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wähle $\underline{z = \lambda}$, zweite Zeile $\Rightarrow$ $\underline{y = \lambda}$

erste Zeile $\Rightarrow$ $\underline{x = 2\lambda}$

$$\Rightarrow E_A(3) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

und $\underline{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$ ist Eigenvektor von A zu $\lambda_1 = 3$.

Jetzt berechnen wir den Eigenraum zu $\lambda_2 = -3$:

$$E_A(-3) = \operatorname{Kern}(A - (-3)E_3) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Gauß $\rightsquigarrow$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Wähle also $\underline{x = \lambda}$, $\underline{y = \mu}$ $\Rightarrow$ $\underline{z = -2\lambda - \mu}$

$$\Rightarrow E_A(-3) = \left\{ \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{=v_2} + \mu \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=v_3} \right\}$$

Damit erhalten wir $\underline{\underline{S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}}$