5. Vektorräume mit Skalarprodukt

<u>Definition 5.1:</u> Sei V ein $\mathbb{R}$-VR ~~oder ein~~ ~~$\mathbb{C}$-VR~~. Eine Abbildung $V \times V \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ heißt Skalarprodukt (SP), falls $\forall x,y,y' \in V$, $\lambda \in K$ gilt:

i) linear im zweiten Argument:

$$\langle x, y+\lambda y'\rangle = \langle x,y\rangle + \lambda\langle y,y'\rangle$$

ii) symmetrisch: $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

iii) positiv definit: $\langle x,x\rangle \geq 0$ und $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Ein VR mit SP $(V, \langle \cdot,\cdot\rangle)$ heißt <u>Euklidischer Raum</u>. In ihm können Längen, Abstände und Winkel gemessen werden. Auch gilt hier der Satz des Pythagoras.

<u>Bemerkung:</u> Man auch $\mathbb{C}$ als Grundkörper zulassen. Dann gilt ii') konjugiert symmetrisch: $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$ und $(V, \langle \cdot,\cdot\rangle)$ heißt <u>unitärer Raum</u>.

<u>Lemma 5.2:</u> Im Euklidischen Raum $(V, \langle \cdot,\cdot\rangle)$ ist das SP linear auch im ersten Argument.

<u>Beweis:</u> Sei $x, x' \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$. $(y \in V)$

Zu zeigen: $\langle x+\lambda x', y\rangle \overset{?}{=} \langle x,y\rangle + \lambda\langle x',y\rangle$

links: $\langle x+\lambda x', y\rangle \underset{\text{symmetrisch}}{=} \langle y, x+\lambda x'\rangle \underset{\text{linear im zweiten Argument}}{=} \langle y,x\rangle + \lambda\langle y,x'\rangle$

$\overset{\text{symmetrisch}}{=} \langle x,y\rangle + \lambda\langle x',y\rangle = \text{rechts}$ ✓ ▨

<u>Beispiel:</u> 1) Das wichtigste Beispiel ist das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$:

Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiere

$$\left\| \langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^T y \right\|$$

als Matrixmultiplikation geschrieben!

<u>z.B.</u> $V = \mathbb{R}^3$, $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i = 2 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = \underline{3}$$

$$\text{oder: } \langle x, y \rangle = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{3}$$

2) Es gibt auch abstraktere Skalarprodukte:

$V = \{ p : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ p \text{ ist Polynom} \}$ ist ein $\mathbb{R}$-VR (Nullpolynom $\in V$, Summe von Polynomen ist wieder ein Polynom, ...)

Definiere darauf ein Skalarprodukt mittels

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^{1} dx \; p(x) q(x)$$

ja! Alle Eigenschaften aus Def. 5.1 sind erfüllt!

z.B.: $p(x) = x^2$, $q(x) = x + 1$

$$\Longrightarrow \langle x^2, x+1 \rangle = \int_{-1}^{1} dx \; x^2 (x+1) = \frac{2}{3}.$$

<u>Bemerkung:</u> Im Folgenden (es sei denn wir sagen etwas anderes), bezeichnet <u>$\langle \cdot, \cdot \rangle$ immer das Standard-SP!</u>

FLA
34

Definition 5.3: Zugehörige **Norm**:

Über das Skalarprodukt kann man die **Norm** eines Vektors definieren: (wieder $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Euklidischer Raum)

Für $x \in V$:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} \in \mathbb{R}$$

Ferner definiert man den Winkel zwischen $x, y \in V$:

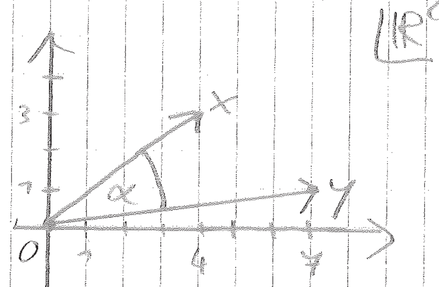
$$\sphericalangle(x,y) := \arccos\left(\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}\right)$$

Umkehrfunktion zu cos

Beispiel: Wir betrachten $V = \mathbb{R}^2$.

1) $x = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$

Der Winkel zwischen x und y heiße α



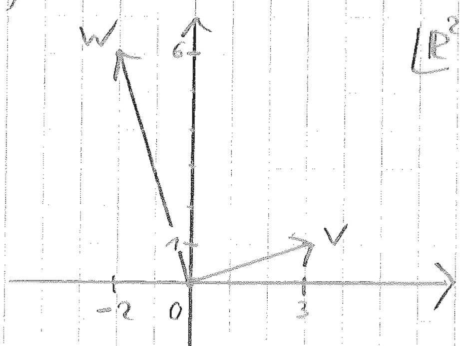
$$\Rightarrow \|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{(4\ \ 3)\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}} = \sqrt{16+9} = \underline{5}$$

$$\|y\| = \sqrt{\langle y,y\rangle} = \sqrt{(7\ \ 1)\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}} = \sqrt{50} = \underline{5\sqrt{2}}$$

Außerdem gilt: $\langle x,y\rangle = (4\ \ 3)\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix} = 28+3 = \underline{31}$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{31}{5\cdot 5\sqrt{2}}\right) \approx \arccos(0{,}87) \approx \underline{28{,}7^\circ}$$

2) Es sei nun $v = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$



Es gilt: $\langle v,w\rangle = 0$

$\Rightarrow$ Der Winkel zwischen v und w ist $\arccos(0) = \underline{90^\circ}$, d.h. $v \perp w$ (v steht <u>senkrecht</u> auf w)

FLA 35

<u>Definition 5.4:</u> Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Euklidischer VR. Zwei Vektoren $x, y \in V$ heißen <u>orthogonal</u>, falls $\langle x, y \rangle = 0$ gilt.
Die Vektoren heißen <u>orthonormal</u>, falls <u>zusätzlich</u> $\|x\| = \|y\| = 1$, d.h. wenn sie <u>normiert</u> sind.
Ist $M \subseteq V$ eine Basis und gilt für $x, y \in M$

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} 0, & x \neq y \\ 1, & x = y \end{cases}$$

dann heißt M <u>Orthonormalbasis</u> (ONB) von V.

<u>Beispiel:</u> 1) $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Standard-SP und der kanonischen Basis $M = \{e_1, \dots, e_n\}$ ist eine ONB von V.

2) Die Menge $M = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}}_{=: v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}}_{=: v_2} \right\}$ ist eine ONB von $\mathbb{R}^2$.

<u>Bew:</u>
$$\langle v_1, v_2 \rangle = v_1^T \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{5}\left(3 \cdot (-4) + 4 \cdot 3\right) = \underline{0}$$

und $\|v_1\| = \langle v_1, v_1 \rangle = \dots = \underline{1} = \|v_2\|$

$\Rightarrow$ M ist eine <u>orthonormale</u> Menge

Außerdem ist M eine Basis, denn

$$\det \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ M ist <u>ONB von $\mathbb{R}^2$</u>

FLA
36

Basisentwicklungssatz 5.5:

Sei $M \subseteq V$ eine ONB. Dann gilt für jedes $x \in V$:

$$x = \sum_{v_i \in M} \langle x, v_i \rangle v_i, \qquad \left(x = \sum_{v_i \in M} \alpha_i v_i \right)$$

d.h. (mit anderen Worten, da M insb. eine Basis von V ist) die Koordinaten von x bzgl. der Basis M sind gerade $\langle x, v \rangle$.

Satz 5.6: Jeder endlichdimensionale Euklidische Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ hat eine ONB.

Wir wissen bereits, dass V eine Basis hat. Das Gram-Schmidt-Verfahren wandelt eine (nicht-orthogonale) Basis $M \subseteq V$ in eine ONB um:

1) $\dim V = n \Rightarrow M = \{x_1, \dots, x_n\}$
Wir basteln uns aus M eine ONB M':
Setze $x_1' := \frac{x_1}{\|x_1\|}$. Damit gilt $\|x_1'\| = 1$ ✓

2) Induktiv: Für den $(k+1)$-ten Basisvektor in M' setze zuerst $v_{k+1} := x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle x_i', x_{k+1} \rangle x_i'$.
Danach wird v_{k+1} noch normiert: $x_{k+1}' := \frac{v_{k+1}}{\|v_{k+1}\|}$.
Damit gilt $\|x_{k+1}'\| = 1$ ✓.

(wiederhole dies für alle Elemente $x_i \in M$!)

3) Die Menge $M' = \{x_1', x_2', \dots, x_n'\}$ ist nun eine ONB von V.

<u>Beispiel:</u> Für $V = \mathbb{R}^3$ wird eine ONB gesucht.

Sei $M = \left\{ x_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

Wir wenden Gram-Schmidt an: $(n = 3)$

1) $$x_1' := \frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \text{denn } \|x_1\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$$

2) $$\underset{\underset{(k=1)}{\uparrow}}{v_2} := x_2 - \langle x_1', x_2 \rangle x_1'$$

Es gilt $\langle x_1', x_2 \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix} \right\rangle = \frac{6}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix} - \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$$

Da $\|v_2\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ gilt, folgt $\quad x_2' = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

<u>Nun für $k = 2$:</u>

$$v_3 = x_3 - \langle x_1', x_3 \rangle x_1' - \langle x_2', x_3 \rangle x_2' =$$
$$= (\text{analoge Rechnung} \ldots) = \begin{pmatrix}1/6\\-1/3\\1/6\end{pmatrix}$$

Da $\|v_3\| = \sqrt{\frac{1}{6}}$ gilt, folgt $\quad x_3' = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

3) Damit haben wir die gewünschte ONB von $\mathbb{R}^3$ gefunden:

$$M' = \left\{ x_1' = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ x_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\ x_3' = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \right\}$$

FINE

<u>VIEL ERFOLG BEI ALLEN KLAUSUREN!</u>