FLA
23

4. Diagonalisierung

Es sei wieder V ein K-VR mit $\dim(V) = n < \infty$ und $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ eine Basis. $f: V \to V$ sei linear, so heißt f Endomorphismus, $\mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V,V)$.
Die Abbildungsmatrix $M(f)$ ist quadratisch. (M aus Satz 3.20)

Lemma 4.1: $(\mathrm{End}(V), \circ)$ ist die Endomorphismenalgebra mit der Verknüpfung $\circ: V \times V \to V$, die assoziativ und distributiv ist, sowie $(\lambda g) \circ f = \lambda (g \circ f) = g \circ (\lambda f)$.
Außerdem ist $K^{n \times n}$ eine Matrixalgebra

(vgl. Def. 3.17)

Definition 4.2: $f \in \mathrm{End}(V)$ heißt Automorphismus $\underline{f}$ falls es ein $g \in \mathrm{End}(V)$ gibt mit $f \circ g = id_V$. Dann ist $g = f^{-1}$.
Man definiert die Matrixgruppe

$$GL(n,K) := M(\mathrm{Aut}(V)) = \{A \in K^{n \times n} : A \text{ invertierbar}\},$$

die allgemeine lineare Gruppe.

⇝ Übung: Gruppennachweis von $GL(n,K)$

Definition 4.3: Für eine Matrix A definiert man

$$\mathrm{Kern}(A) := \mathrm{Kern}(L_A), \quad \mathrm{Bild}(A) := \mathrm{Bild}(L_A), \quad \mathrm{Rang}(A) := \ldots$$

Satz 4.4: $A \in GL(n,K) \iff \mathrm{Rang}(A) = n$.

Lemma 4.5: Sei $f: V \to W$ ein Isomorphismus. Dann ist die zugehörige Abbildungsmatrix invertierbar.

Basiswechsel

Wir fragen jetzt, wie sich die Abbildungsmatrix verändert, wenn die Basis in V oder W geändert wird. ($\dim V = n$, $\dim W = m$)

Betrachte also zwei Basen $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ und $\{v_i'\}_{i=1}^n \subseteq V$.

Die Koordinaten von v_j' bzgl. $\{v_i\}_{i=1}^n$ heißen s_{ij}:

$$v_j' = \sum_{i=1}^n s_{ij} v_i . \quad (\underline{\text{Basis}})$$

Die Matrix $S = (s_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ ist wg. Satz 4.4 invertierbar, denn sonst kann $\{v_i'\}_{i=1}^n$ keine Basis von V sein.

Was geschieht mit den Koordinaten bzgl. $\{v_i\}_{i=1}^n$? Betrachte ein $V \ni x = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i$. In der neuen Basis gilt:

$$x = \sum_{j=1}^n \xi_j' v_j' = \sum_{j=1}^n \xi_j' \sum_{i=1}^n s_{ij} v_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n s_{ij} \xi_j' \right) v_i$$

$$\Rightarrow \quad \xi_i = \sum_{j=1}^n s_{ij} \xi_j' . \quad (\underline{\text{Koordinaten}})$$

d.h. $\underline{\xi} = S \underline{\xi}' \iff \underline{\xi}' = S^{-1} \underline{\xi}$

Ebenso wird $T = (t_{pq})_{p,q=1,\dots,m}$ eingeführt für den Basiswechsel in W: $w_q' = \sum_{p=1}^m t_{pq} w_p$. Ebenso wie S ist T ein Automorphismus.

Satz 4.6: Abbildungsmatrix nach Basiswechsel

V, W, S, T wie gerade eben, $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ mit Abbildungsmatrix A bzgl. $\{v_i\}_{i=1}^n$, $\{w_j\}_{j=1}^m$. Dann gilt bzgl. der neuen Basen:

$$A' = T^{-1} A S .$$

Beweis: Laut Definition der Abbildungsmatrix betrachten wir

$$f(v_j') = f\left(\sum_{i=1}^n s_{ij} v_i \right) = \sum_{i=1}^n s_{ij} f(v_i) =$$

A ist alte Abbildungsmatrix

$$= \sum_{i=1}^n s_{ij} \sum_{k=1}^n a_{ki} w_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ki} s_{ij} \right) w_k = \dots$$

FLA 25

Bezeichne $(\tilde{t}_{pq})_{p,q=1,\dots,m} := T^{-1} : W \to W$ den zu T inversen Automorphismus, dann gilt $w_p = \sum_{q=1}^{m} \tilde{t}_{qp} w'_q$ $[! \ \tilde{t}_{pq} \neq t_{pq}^{-1}]$

$$\Rightarrow \dots = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki} s_{ij} \right) \sum_{q=1}^{m} \tilde{t}_{qk} w'_q =$$

$$= \sum_{q=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \tilde{t}_{qk} a_{ki} s_{ij} \right) w'_q \overset{!}{=} \sum_{q=1}^{m} a'_{qj} w'_q$$

Also: $a'_{qj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \tilde{t}_{qk} a_{ki} s_{ij}$, d.h. $A' = T^{-1} A S$ ✓

<u>Korollar 4.7:</u> Ist $f \in \mathrm{End}(V)$, dann gilt $T = S$, d.h.

$$A' = S^{-1} A S.$$

<u>Anwendung:</u> Die <u>Diagonalisierung von Endomorphismen</u> ist der Versuch, durch geschickte Wahl einer Basis in V, die Abbildungsmatrix so einfach wie möglich, d.h. diagonal, zu schreiben. Man nennt dies auch <u>Hauptachsentransformation</u>.

<u>Definition 4.8:</u> Eine <u>Determinantenfunktion det</u> ist eine Abbildung $\det : K^{n\times n} \to K$ der Endomorphismen auf den Skalarkörper mit

i) det ist multilinear bzgl. der Spalten, d.h.

$$\det(a_1, \dots, a_k + \lambda a'_k, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n) + \lambda \det(a_1, \dots, a'_k, \dots, a_n)$$

ii) $\det(a_1, \dots, a_n) = 0$, falls $\{a_i\}_{i=1}^{n} \subseteq K^n$ linear abhängig

iii) $\det E_n = 1$.

<u>Satz 4.9:</u> Es gibt genau eine Determinantenfunktion.

<u>Leibniz-Formel:</u> $\det A = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}(\pi) \prod_{k=1}^{n} a_{\pi(k)k}$

FLA
26

<u>Beispiele:</u> i) <u>$n=1$:</u> $\det A = A$

ii) $\det A = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

iii) <u>$n=3$:</u> $\det A = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} =$ „Regel von Sarrus"

$$= aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

<u>Übungen</u> $\rightsquigarrow$ Rechenregeln für det

<u>Beispiel:</u> Vandermonde Determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

Dies kann man zeigen, indem man anwendet:

<u>Lemma 4.10:</u> Zeilen- und Spalten-Entwicklung

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+l} a_{kl} \det A_{(kl)}, \quad l\text{-te Spalte},$$

$$\det A = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{k+l} a_{kl} \det A_{(kl)}, \quad k\text{-te Zeile},$$

wobei $A_{(kl)}$ die Matrix A ist, bei der <u>Zeile k und Spalte l gestrichen</u> wurde.

<u>Beispiel:</u>

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{pmatrix} = \det \begin{array}{c} \text{1-te Spalte} \\ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y-x \end{pmatrix} \end{array} = (+1) \cdot \det (y-x) (-0) \cdot \det (x)$$

$$= y - x \checkmark$$

2. Zeile
$\mapsto$ 2. Zeile $\ominus$ 1. Zeile

$\rightsquigarrow$ <u>Vorzeichen:</u> $\begin{pmatrix} \oplus & \ominus & \oplus & \cdots \\ \ominus & \oplus & \ominus & \\ \oplus & \ominus & \oplus & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$

FLA
27

Satz 4.11: $A \in GL(n,K) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Übungen ⇝ Beweis.

Definition 4.12: Zwei Matrizen A, A' heißen *ähnlich*, falls es $S \in GL(n,K)$ gibt mit $A' = S^{-1}AS$.
[→ vgl. Basiswechsel in Korollar 4.7]

Bemerkung: i) Die Relation $A \sim B :\Leftrightarrow A$ ist ähnlich zu B auf der Menge der Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ ist eine *Äquivalenzrelation*.
ii) Physikalisch drückt dies aus, dass sich die „grundlegenden" Systemeigenschaften nicht verändern, wenn man nur die Basis wechselt. Die Forderung einer völligen Freiheit von irgendwelchen Basen führt (mathematisch) zum Tensorkalkül und (physikalisch) zu Konzepten der Allgemeinen Relativität.
iii) Diagonalisierung ist der Versuch, eine „möglichst einfache" Matrix A' zu finden, die ähnlich zu A ist.

Definition 4.13: Sei V ein K-VR, $f \in End(V)$ und $\lambda \in K$.
λ heißt *Eigenwert* von f, falls es $0 \neq v \in V$ gibt mit $f(v) = \lambda v$.
v heißt *Eigenvektor* von f zum Eigenwert λ.
Der Endomorphismus f heißt *diagonalisierbar*, falls es eine Basis in V aus Eigenvektoren von f gibt.

Satz 4.14: $f \in End(V)$ ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ Abbildungsmatrix A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix

FLA
28

<u>Beweis:</u> „$\Rightarrow$" f sei diagonalisierbar, d.h. $\exists$ Basis $\{v_i\}_{i=1}^n$ mit $f(v_i) = \lambda_i v_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} v_j$ mit $\alpha_{ij} = \lambda_j \delta_{ij}$,

d.h. die Abbildungsmatrix ist $D = (\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ ist diagonal. Sei geht aus der alten Abbildungsmatrix A aus einem <u>Basiswechsel</u> hervor, d.h. $\exists S \in GL(n,K)$ mit $D = S^{-1}AS$. Damit ist A ähnlich zu D.

„$\Leftarrow$" Es gibt $S \in GL(n,K)$ mit $D = diag(\lambda_i) = (\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = S^{-1}AS$, wobei $\alpha_{ij} = \lambda_j \delta_{ij}$, d.h. es gibt eine Basis $\{v_i\}_{i=1}^n$ mit

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} v_j = \sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_{ij} v_j = \lambda_i v_i,$$ d.h. die v_i sind

Eigenvektoren von f. //

<u>Lemma 4.15:</u> Seien $v_1, \dots, v_n$ Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von $f \in End(V)$, dann sind die n Eigenvektoren linear unabhängig. $\rightsquigarrow$ Übung

<u>Korollar 4.16:</u> Hinreichendes Diagonalisierungskriterium

Ist $n = \dim V < \infty$ und hat $f \in End(V)$ n unterschiedliche Eigenwerte, dann ist f diagonalisierbar.

<u>Hauptlemma 4.17</u> Für $f \in End(V)$ gilt:

$$\lambda \in K \text{ ist EW von } f \Leftrightarrow Kern(f - \lambda id_V) \neq \{0\}$$

Auf Matrixebene heißt dies:

$$\lambda \in K \text{ ist EW von } A \Leftrightarrow det(A - \lambda E_n) = 0$$

<u>Definition 4.18:</u> Zu $A \in K^{n \times n}$ bezeichnen $\chi_A : K \to K$, $\lambda \mapsto \chi_A(\lambda) = det(A - \lambda E_n)$ das <u>charakteristische Polynom</u>.

<u>Es gilt:</u> $\chi_A(\lambda) = \underbrace{(-1)^n \lambda^n} + \underbrace{(-1)^{n-1} \operatorname{Spur}(A) \lambda^{n-1}}_{\uparrow \text{ schwierig zu zeigen}} + \dots + \underbrace{\det A}_{\uparrow \text{ klar: } \lambda = 0}$

Nullstellen des charakteristischen Polynoms, $\chi_A(\lambda) = 0$, sind genau die EW von A.

<u>Definition 4.19:</u> Für $\lambda \in K$ nennt man $E_f(\lambda) := \operatorname{Kern}(f - \lambda \mathrm{id}_V)$ den <u>Eigenraum</u> von f bzgl. λ. $\gamma_f(\lambda) := \dim E_f(\lambda)$ heißt <u>geometrische Vielfachheit</u> von λ. Die <u>algebraische Vielfachheit</u> von λ ist die Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi(\lambda)$, schreibe $\alpha_f(\lambda)$.

<u>Bemerkungen:</u> i) $E_f(\lambda)$ sind UVR von V. Jedes $0 \neq x \in E_f(\lambda)$ ist ein EV von λ.

ii) Aus Lemma 4.15 folgt, dass der Schnitt $E_f(\lambda_1) \cap E_f(\lambda_2) = \{0\}$ für $\lambda_1 \neq \lambda_2$, d.h. die Summe von Eigenräumen ist direkt (vgl. Definition 3.10)

<u>Lemma 4.20:</u> Sei $f \in \operatorname{End}(V)$ diagonalisierbar. Dann ist $\chi_f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{\gamma_1} (\lambda_2 - \lambda)^{\gamma_2} \cdots (\lambda_s - \lambda)^{\gamma_s}$, wobei λ_i die paarweise verschiedenen EW von f mit geometrischer Vielfachheit $\gamma_i := \gamma_f(\lambda_i)$ sind.

<u>Beweis:</u> Die Darstellungsmatrix von f ist die Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{\gamma_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s E_{\gamma_s} \end{pmatrix},$$

denn $\chi_f = \chi_D = \det(D - \lambda E_n)$ ist erfüllt. $\blacksquare$

Satz 4.21: Es gilt stets $\gamma_f(\lambda) \leq \alpha_f(\lambda)$, d.h. die geometrische Vielfachheit ist höchstens ihre algebraische.

Beweis: Sei λ_0 ein EW von $f \in End(V)$, $\gamma := \gamma_f(\lambda_0)$.
Die Basis $\{v_i\}_{i=1}^{\gamma}$ von $E_f(\lambda)$ kann durch $v_{\gamma+1}, \dots, v_n$ zu einer Basis von V ergänzt werden. Bezüglich dieser Basis ist die Abbildungsmatrix von f gerade

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_0 E_\gamma & * \\ \hline & B \end{array} \right), \quad \text{d.h. } \chi_f = \chi_A = \det(A - \lambda E_n)$$

Entwickelt man nach den ersten λ Zeilen, so erhält man

$$\chi_f = (\lambda_0 - \lambda)^\gamma \det(B - \lambda E_{n-\gamma}),$$

also folgt $\gamma \leq \alpha_f(\lambda_0)$.

Satz zur Diagonalisierbarkeit 4.22

Sei V ein K-VR mit $n = \dim V < \infty$ und $f \in End(V)$, dann sind äquivalent:

i) f ist diagonalisierbar

ii) χ_f zerfällt in Linearfaktoren und $\gamma_f(\lambda) = \alpha_f(\lambda)$ für alle EW λ von f.

iii) $V = E_f(\lambda_1) \oplus E_f(\lambda_2) \oplus \dots \oplus E_f(\lambda_s)$, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ die paarweise verschiedenen EW von f sind.

Beweis: i) $\Rightarrow$ ii) Dies folgt aus Lemma 4.20

ii) $\Rightarrow$ iii) $\dim V = n = \alpha_f(\lambda_1) + \dots + \alpha_f(\lambda_s) =$

Polynom hat genau n NST

$= \gamma_f(\lambda_1) + \dots + \gamma_f(\lambda_s)$,

Voraussetzung ii)

d.h. $V = \bigoplus_{i=1}^{s} E_f(\lambda_i)$ (mit Lemma 4.15)

FLA

31

iii) $\Rightarrow$ i) $V = \bigoplus_{i=1}^{s} E_f(\lambda_i)$ bedeutet, dass es eine Basis von V aus EW gibt, d.h. f nach Def. diagonalisierbar