FLA
15

3. Lineare Abbildungen

Vektorräume werden auch lineare Räume genannt. Die wichtigsten Abbildungen zwischen ihnen sind lineare Abbildungen

$$f: V \longrightarrow W \quad \text{mit} \quad f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y) \quad \forall x,y \in V, \lambda \in K.$$

$\rightsquigarrow$ Übungen: Beispiele

Satz 3.1: Lineare Fortsetzung V und W seien K-VR. Seien $x_1, \dots, x_n$ eine Basis von V und $y_1, \dots, y_n$ beliebige Vektoren in W. Dann existiert genau eine lineare Abbildung $f: V \to W$ mit $f(x_i) = y_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Beweis: Eindeutigkeit $\rightsquigarrow$ Übungen

Existenz: Sei $x \in V$ beliebig. Bzgl. der Basis $\{x_i\}_{i=1}^n$ hat x die eindeutigen(!) Koordinaten α_j : $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j$. Definiere nun $f: V \longrightarrow W$, $x \longmapsto \sum_{j=1}^n \alpha_j y_j$, welches wohldefiniert ist. Es gilt $f(x_i) \underset{\alpha_j = \delta_{ij}}{=} \sum_{j=1}^n \delta_{ij} y_j = y_i$, für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

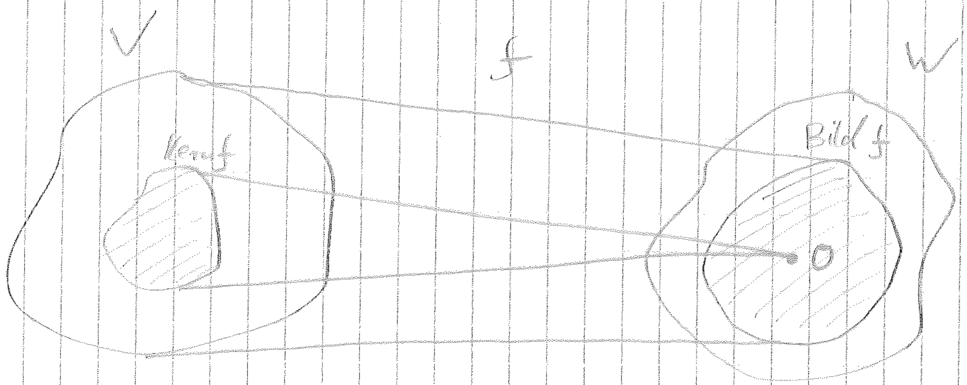
Zeige noch, dass f linear ist:

$$f(x+\lambda x') = f\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j + \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_j' x_j\right) =$$

$$= f\left(\sum_{j=1}^n (\alpha_j + \lambda \alpha_j') x_j\right) \overset{\text{Def. von } f}{=} \sum_{j=1}^n (\alpha_j + \lambda \alpha_j') y_j =$$

$$= \sum_{j=1}^n \alpha_j y_j + \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_j' y_j = f(x) + \lambda f(x') \quad \checkmark$$

Definition 3.2: Sei $f: V \longrightarrow W$ linear. Dann heißt $f(V) =: \mathrm{Bild}(f) \subseteq W$ das <u>Bild von f</u>, und $f^{-1}(\{0\}) =: \mathrm{Kern}(f) \subseteq V$ der <u>Kern von f</u>.



Lemma 3.3: Bild(f) und Kern(f) sind UVR von V bzw. W.

Damit ist der „Rang" einer Abbildung wohldefiniert:

Definition 3.4: Sei $f: V \to W$ linear. Der Rang von f ist

$$\operatorname{Rang}(f) := \dim \operatorname{Bild}(f)$$

Lemma 3.5: f surjektiv $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Rang}(f) = \dim W$

Beweis: „$\Rightarrow$" $\operatorname{Rang}(f) = \dim \operatorname{Bild}(f) \overset{\text{surj.}}{=} \dim W$ ✓

„$\Leftarrow$" Sei $\{y_1, \dots, y_n\}$ eine Basis von Bild(f), wobei $n = \operatorname{Rang}(f) = \dim W$. Mit dem Basisergänzungssatz 2.14 folgt ($\{y_1, \dots, y_n\}$ sind linear unabhängige Vektoren in W), dass $\{y_1, \dots, y_n\}$ bereits eine Basis von W ist. Daher $\operatorname{Bild}(f) = W$, d.h. f surjektiv ■

Lemma 3.6: f injektiv $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Kern} f = \{0\}$

Beweis: „$\Rightarrow$" Sei $x \in \operatorname{Kern}(f)$, d.h. $f(x) = 0$. Da f linear ist, folgt $f(0) = 0$, denn $f(0) = f(\lambda \cdot 0) = \lambda \cdot f(0)$ $\forall \lambda \in K$. Da f injektiv ist, muss $x = 0$ sein.

„$\Leftarrow$" Seien $x, y \in V$ mit $f(x) = f(y)$. Zu zeigen: $x = y$. Da f linear ist, folgt $0 = f(x) - f(y) = f(x - y)$, d.h. $x - y \in \operatorname{Kern}(f)$. Nach Voraussetzung ist also $x - y = 0$, d.h. $x = y$. ■

⇝ Übungen: Kern/Bild bestimmen

FLA
17

Lemma 3.7: Sei $f: V \to W$ linear und injektiv und $\{x_i\}_{i=1}^{n} \subseteq V$ linear unabhängig. Dann sind $\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ linear unabhängig.

Beweis: Sei $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) = 0$. Da f linear ist, folgt $f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = 0$. Da f injektiv ist, folgt $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$, was $\alpha_i = 0$ impliziert. ∎

Dimensionsformel / Kern-Bild-Satz 3.8:
Sei $\dim V < \infty$ und $f: V \to W$ linear. Dann gilt:

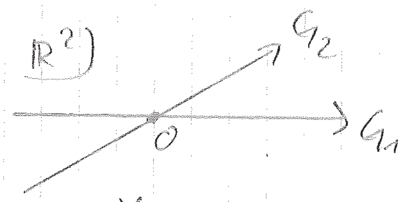
$$\dim V = \dim \mathrm{Kern}(f) + \mathrm{Rang}(f)$$

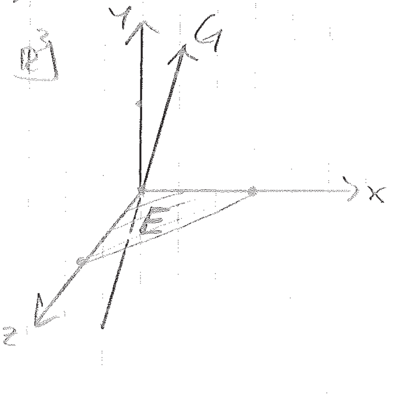
Korollar 3.9: Seien $\dim V = \dim W < \infty$, $f: V \to W$ linear.

f injektiv $\Leftrightarrow$ f surjektiv $\Leftrightarrow$ f bijektiv.

Definition 3.10: Ein K-VR V heißt direkte Summe der UVR U und U', falls
i) $U + U' = V$ (vgl. Definition 2.9 der Vektorraumsumme)
ii) $U \cap U' = \{0\}$
Man schreibt $V = U \oplus U'$ und nennt U (U') ein VR-Komplement von U' (U).

Beispiele:
1) $\mathbb{R}^2 = G_1 \oplus G_2$ für je zwei verschiedene Gerade durch $\binom{0}{0}$
2) $\mathbb{R}^3 = E \oplus G$ für jede Ebene G und Gerade G mit $0 \in G, 0 \in E$ und $G \not\subseteq E$.





FLA 18

Behandle nun die lineare Gleichung $f(x) = b$ für $f: V \to W$ linear, $b \in W$.

i) f heißt homogen, falls $b = 0$.

f wird gelöst $\Leftrightarrow$ $x \in \mathrm{Kern}(f)$

ii) f heißt inhomogen, falls $b \neq 0$.

f ist lösbar $\Leftrightarrow$ $b \in \mathrm{Bild}(f)$

iii) Die allgemeine Lösung ist

$$f^{-1}(\{b\}) = x_0 + \mathrm{Kern}(f),$$

wobei x_0 eine spezielle (partikuläre) Lösung von $f(x) = b$ ist.

Beweis zu iii): „$\supseteq$" Sei $x = x_0 + z$ mit $z \in \mathrm{Kern}(f)$, dann ist $f(x) = f(x_0) + f(z) = b$, also $x \in f^{-1}(\{b\})$.

„$\subseteq$" Sei $x \in V$ eine Lösung, d.h. $f(x) = b$. Da $f(x_0) = b$ ebenso gilt, folgt $f(x) = f(x_0) \Rightarrow 0 = f(x) - f(x_0) = f(x - x_0)$

$\Rightarrow x - x_0 =: z \in \mathrm{Kern}(f)$ und die Lösung hat die Form $x = x_0 + z$, d.h. $x \in x_0 + \mathrm{Kern}(f)$.

Lemma 3.11: Sei $\dim V = \dim W < \infty$. Dann sind äquivalent:

a) $f(x) = b$ hat für jedes $b \in W$ eine Lösung, d.h. f surjektiv.

b) $f(x) = 0$ hat nur die Lösung $x = 0$, d.h. f injektiv.

Gilt a) oder b), so hat $f(x) = b$ für jedes $b \in W$ genau eine Lösung, d.h. f bijektiv.

Beweis: Folgt aus Korollar 3.9.

Die Lösungen von $f(x) = b$ können als „verschobener" UVR von V aufgefasst werden:

FLA
19

<u>Definition 3.12:</u> Sei V ein K-VR und $U \subseteq V$ ein UVR und $a \in V$. Man nennt

$$a + U := \{a + u : u \in U\}$$ einen <u>affinen Unterraum</u> von V.

<u>Bemerkungen:</u>

i) $a + U$ ist ein UVR von V $\Leftrightarrow$ $a = 0$.

ii) Die Lösungsmenge von $f(x) = b$ ist der affine Raum $x_0 + \ker(f)$, wobei $f(x_0) = b$, $x_0 \in V$.

Betrachtet man <u>alle</u> linearen Abbildung $f: V \to W$ zwischen K-VR V und W, so bilden sie die Menge $\mathrm{Hom}(V,W)$, die Menge aller <u>Homomorphismen</u> zwischen V und W.

<u>Lemma 3.13:</u> $\mathrm{Hom}(V,W)$ ist ein UVR von W^V versehen mit der punktweisen Verknüpfung.

<u>Beweis:</u> Die Nullabbildung $0 \in W^V$. Zu zeigen ist, dass für $f, g \in \mathrm{Hom}(V,W)$ auch $f + \lambda g \in \mathrm{Hom}(V,W)$ gilt:

$$\begin{aligned}(f + \lambda g)(x + \alpha y) &\overset{\text{pkt.}}{=} f(x+\alpha y) + \lambda g(x + \alpha y) = \\ &\overset{\text{lin}}{=} f(x) + \alpha f(y) + \lambda g(x) + \lambda\alpha\, g(y) = \\ &= f(x) + \lambda g(x) + \alpha\big(f(y) + \lambda g(y)\big) = \\ &= (f + \lambda g)(x) + \alpha(f + \lambda g)(y) \quad \checkmark\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Übung: für 0 nachweisen

<u>Definition 3.14:</u> $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ heißt <u>(VR-) Isomorphismus</u>, falls f bijektiv ist. V und W heißen <u>isomorph</u>, falls es einen Isomorphismus $f: V \to W$ gibt. Man schreibt $V \cong W$.

<u>Lemma 3.15:</u> f Isomorphismus $\Rightarrow$ f^{-1} Isomorphismus

$\rightsquigarrow$ Übungen

FLA
20

Lemma 3.16: Seien V, W K-VR und $\dim V < \infty$. Dann
$$V \cong W \iff \dim V = \dim W,$$
d.h. endlich-dimensionale K-VR sind bereits durch die Angabe ihrer Dimension gänzlich bestimmt.
Anders gesagt: Jeder $\mathbb{R}$-VR mit drei Dimensionen ist bis auf Umbenennung (bis auf Isomorphie) der $\mathbb{R}^3$.

Definition 3.17: $Aut(V)$ bezeichnet die Menge aller Automorphismen von V, d.h. die Menge aller Isomorphismen $f: V \to V$ auf sich selbst. $Aut(V) \subseteq Hom(V,V)$.

Frage: Ist $Aut(V)$ ein UVR von $Hom(V,V)$?
$\to$ NEIN, denn die Nullabbildung ist i.A. keine bijektive Abbildung; gilt nur für $V = \{0\}$.

Lemma 3.18: $Aut(V)$ ist eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe $S(V) := \{f: V \to V,\ f \text{ bijektiv}\}$

Beweis: Untergruppennachweis II erfordert: $e \in H$, $g, h \in H \Rightarrow g \circ h^{-1} \in H$.
(Also: $e = id_V$ ✓) Ist $f, g \in Aut(V)$, dann ist g^{-1} ein Isomorphismus nach Lemma (3.15). Aus Übungen ist $f \circ g^{-1}$ linear und auch wieder bijektiv, d.h. $f \circ g^{-1} \in Aut(V)$.
Damit ist $Aut(V)$ Untergruppe von $Hom(V,V)$. ∎

Matrizen sind nichts anderes als eine elegante Art, lineare Abbildungen zu kommunizieren:
Seien V, W endlichdimensionale K-VR mit $\dim V = n$, $\dim W = m$, mit Basen $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ und $\{w_i\}_{i=1}^m \subseteq W$.

FLA

21

spüter → zum Beweis von Satz 4.6

Betrachte nun $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$: $f(v_i) \in W$ kann in der Basis von W eindeutig (!) dargestellt werden:

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} w_j$$

Betrachtet man nicht nur die Basis, sondern ein beliebiges $V \ni x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i v_i$, dann gilt auch $f(x) = \sum_{j=1}^{m} \eta_j w_j$

Der Zusammenhang zwischen den ξ_i und η_j ist durch f gegeben:

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i f(v_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \xi_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} w_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i a_{ji}\right) w_j \overset{!}{=} \sum_{j=1}^{m} \eta_j w_j$$

$$\Longrightarrow \eta_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \xi_i \quad \forall j = 1, \dots, m$$

Dies schreibt man als $\eta = A \xi$ mit der Matrix A, die zwischen den Koordinaten in V und W „vermittelt".

Die Matrix A heißt die f darstellende Matrix oder Abbildungsmatrix für f. (bzgl. der beiden Basen in V und W).

Beispiel: Man sagt „eine lineare Abbildung f ist bekannt, wenn man das Bild der Basis (von V) kennt":

Betrachte $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit den kanonischen Basen. Die zugehörige Abbildungsmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) \\ | & | & & | \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

\# Zeilen (m), \# Spalten (n)

Satz 3.19: Sei $A \in K^{m \times n}$. Dann ist $L_A: K^n \to K^m$, $x \mapsto L_A(x) = Ax$ eine lineare Abbildung.

Darstellungssatz 3.20: Seien V, W K-VR.

$$M: \mathrm{Hom}(V,W) \to K^{m\times n}, \quad f \mapsto M(f)$$

$$L: K^{m\times n} \to \mathrm{Hom}(K^n, K^m), \quad A \mapsto L_A$$

sind VR-Isomorphismen.

Interpretation: Matrizen stellen alle linearen Abbildungen zwischen V und W dar.

Bemerkung: i) Es gibt verschiedene lineare Abbildungen, die auf die gleiche Abbildungsmatrix $A \in K^{m\times n}$ führen.

ii) Die Abbildungsmatrix A ist Basis-abhängig!

Bemerkung: Die Matrizenmultiplikation ist der Gestalt, dass sie die Verknüpfung von Homomorphismen in Abbildungsmatrizen übersetzt. D.h. für $A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{p\times m}$ Abbildungsmatrizen von $f: V \to W$ und $g: W \to U$ (bzgl. entsprechender Basen) ist die Abbildungsmatrix von $h := g \circ f$ gegeben durch $C \in K^{p\times n}$ mit

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{kj}, \quad i \in \{1, \dots, p\}, \; j \in \{1, \dots, n\}.$$

Man schreibt dafür $C = BA$

Da die zugrundeliegenden Homomorphismen assoziativ und distributiv sind, gilt dies auch für Matrizen.