FLA
1

18.03. – 22.03.2013

Ferienkurs Lineare Algebra 1

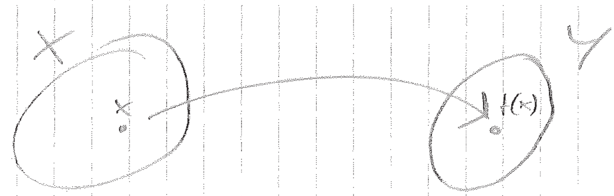
1. Grundlagen: Abbildungen und Mengen
2. Gruppen, Körper, Vektorräume
3. Lineare Abbildungen und Matrizen
4. Diagonalisierung
5. ?

Quelle: Lineare Algebra für Physiker (MA 9201) von Prof. Castrigiano
(WS 2008/09)

1. Grundlagen: Abbildungen und Mengen

Eine Abbildung f ist gegeben durch drei Eigenschaften:

1) Definitionsbereich X
2) Zielbereich Y
3) Abbildungsvorschrift



Man schreibt $f: X \to Y,\ x \mapsto f(x)$

Die Abbildung f ordnet <u>jedem</u> $x \in X$ <u>genau ein</u> $y \in Y$ zu.

<u>Definition 1.1:</u> Der <u>Graph einer Funktion f</u> ist

$$\text{Graph } f := \{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

Das <u>Bild einer Funktion f</u> ist

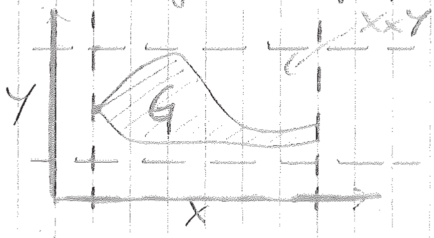
$$f(X) := \{y \in Y : y = f(x)\}$$

<u>Lemma 1.2:</u> $G \subseteq X \times Y$ ist Graph einer Abbildung $f: X \to Y$

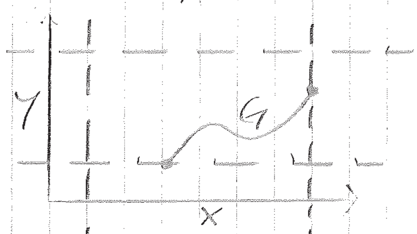
$\Leftrightarrow$ zu jedem $x \in X$ gibt es genau ein $y \in Y$ mit $(x,y) \in G$

$\Leftrightarrow$ $\forall x \in X\ \exists!\, y \in Y: (x,y) \in G$

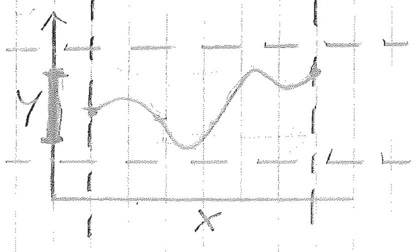
Ferner gilt: $\text{Graph } f \subseteq X \times f(X)$



$G \neq \text{Graph } f$



$G \neq \text{Graph } f$



$G = \text{Graph } f$ ✓

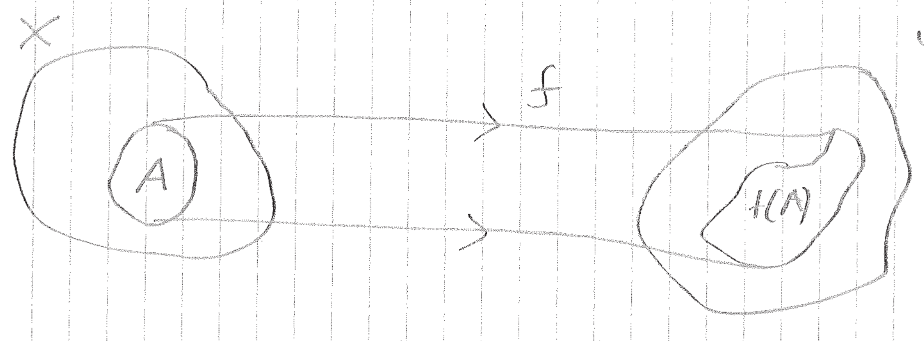
<u>Definition 1.3:</u> Für jede Menge M existiert ihre <u>Potenzmenge $P(M)$</u> $:= \{ A : A \subseteq M \}$.
Die Menge aller Abbildung von X nach Y wird bezeichnet als $Y^X := \{ f \mid f: X \to Y,\ x \mapsto f(x) \}$

$\rightsquigarrow$ Übungen

<u>Bild und Urbild von Mengen</u>

Sei $f: X \to Y,\ x \mapsto f(x)$ eine Abbildung und $A \subseteq X$.

$$f(A) := \{ y \in Y : \exists x \in A \text{ mit } y = f(x) \} =$$
$$= \{ f(x) : x \in A \}$$ ist das <u>Bild von A</u>.



<u>VORSICHT:</u> Abbildungen erhalten <u>nicht notwendigerweise</u> mengentheoretische Operationen! Für $A, B \subseteq X$ gilt:

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

wäre f mengentheoretisch „treu", so stünde ein „="

Ein Beispiel wo keine Gleichheit gilt ist

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ mit $A = \mathbb{R}_0^+,\ B = \mathbb{R}_0^-$

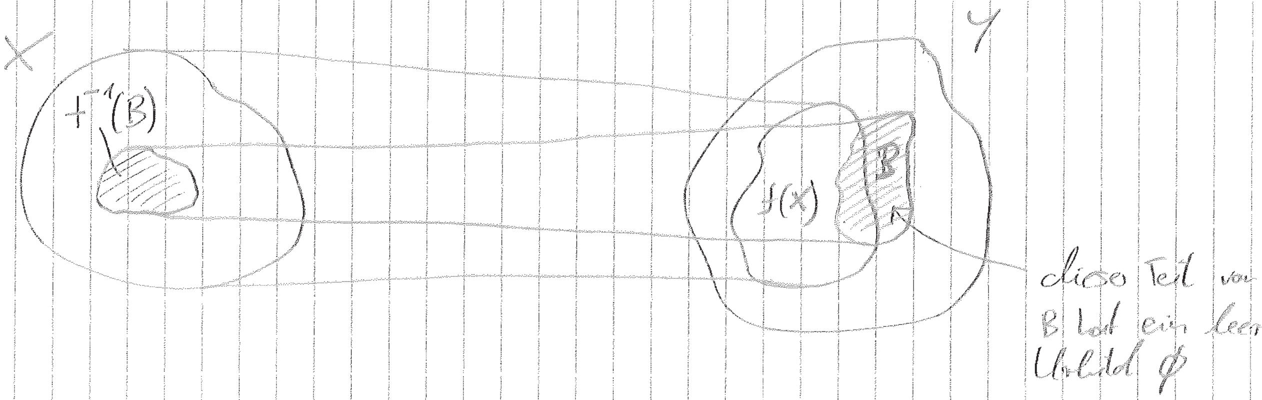
$$\Rightarrow \quad f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\} \neq \underbrace{f(A)}_{\mathbb{R}_0^+} \cap \underbrace{f(B)}_{\mathbb{R}_0^+} = \mathbb{R}_0^+$$

Es gilt allerdings die Treue bzgl. „$\subset$" und „$\cup$"

$$\left.\begin{array}{l} 2)\ f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \\ 1)\ A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B) \end{array}\right\} \rightsquigarrow \text{Übungen}$$

FLA
4

Sei nun $A \subseteq Y$. Ihr <u>Urbild</u> bezüglich der Abbildung f ist
$f^{-1}(A) := \{ x \in X : f(x) \in A \}$



<u>Lemma 1.4:</u> Das Urbild f^{-1} erhält alle mengentheoretische Operation, d.h. f^{-1} ist treu. Für $A, B \subseteq Y$ gilt:

1) $A \subseteq B \implies f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$
2) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
3) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
4) $f^{-1}(B \setminus A) = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(A)$

$B \setminus A := \{ x \in B : x \notin A \}$ $\rightsquigarrow$ <u>Übungen</u>

<u>Lemma 1.5:</u> Seien $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ und $f \in Y^X$.

1) $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$
2) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$

<u>Beweis:</u> Gleichheit von Mengen zeigt man per „$\subseteq$" und „$\supseteq$".

1) „$\subseteq$" Sei $y \in f(f^{-1}(B))$, d.h. $\exists x \in f^{-1}(B)$ mit $f(x) = y$, also $y \in f(X)$. Da $x \in f^{-1}(B) \subseteq X$ gilt nach Def. des Urbildes $f(x) \in B$, also auch $y = f(x) \in B$. Zusammen also $y \in B \cap f(X)$. ✓

„$\supseteq$" Sei nun $y \in B \cap f(X) \implies y \in B$ und $\exists x \in X : f(x) = y$
$\implies \exists x \in f^{-1}(B)$ mit $f(x) = y \implies y \in f(f^{-1}(B))$.

2) Sei $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A)$, d.h. $\exists y \in f(A): y = f(x)$,

$\Rightarrow x \in f^{-1}(\{y\}) \underset{\uparrow\ \text{heres } f^{-1}}{\subseteq} f^{-1}(f(A))$, $\Rightarrow A \subseteq f^{-1}(f(A))$ ∎

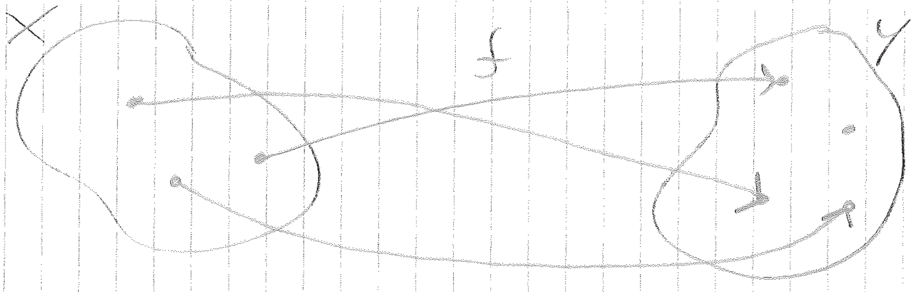
Ein Beispiel bei dem keine Gleichheit in 2) gilt ist wieder

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, $A = \mathbb{R}_0^+$

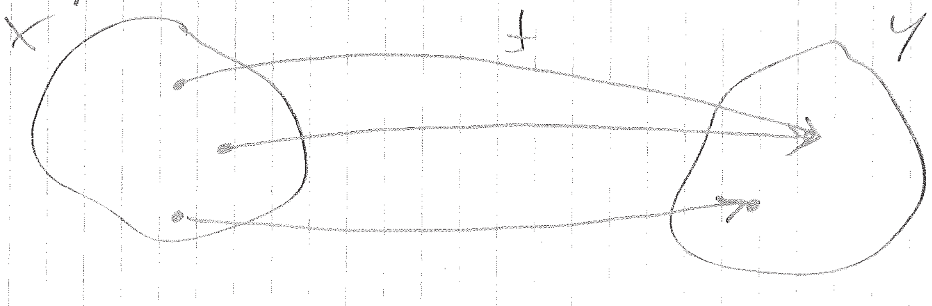
$\Rightarrow f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\mathbb{R}_0^+) = \mathbb{R} \neq A$.

<u>Definition 1.6:</u> Sei $f \in Y^X$ eine Abbildung.

1) f heißt <u>injektiv</u>, falls für jedes $y \in Y$ das Urbild $f^{-1}(\{y\})$ höchstens einelementig ist, d.h. $\forall x, x' \in X$ mit $f(x) = y = f(x')$ folgt $x = x'$.



2) f heißt <u>surjektiv</u>, falls jedes $y \in Y$ im Bild $f(X)$ liegt, d.h. $\forall y \in Y\ \exists x \in X$ mit $f(x) = y$.



3) f heißt <u>bijektiv</u>, falls f injektiv und surjektiv ist.

Für bijektive $f \in Y^X$ kann die <u>Umkehrabbildung</u> $g \in X^Y$ definiert werden: $f \circ g = id_Y$ (d.h. $f(g(y)) = y\ \forall y \in Y$)

<u>und</u> $g \circ f = id_X$ (d.h. $g(f(x)) = x\ \forall x \in X$)

g ist eindeutig und (wieder) bijektiv, man schreibt $f^{-1} := g$.

FLA
6

Bemerkung: Das Urbild $f^{-1}(B)$ von $f \in Y^X$, $B \subseteq Y$, existiert immer und ist „im schlimmsten Fall" die leere Menge. Die Umkehrfunktion hingegen ist nur für bijektive f definiert!

!

Die Schreibweise „$\circ$" ist die Komposition zweier geeigneter Funktionen:
Seien $f \in Y^X$, $g \in Z^Y$, dann ist $h = g \circ f \in Z^X$:

$$h(x) = (g \circ f)(x) := g(\underbrace{f(x)}_{\in Y}) \in Z$$

Lemma 1.7: Mit f, g, h von gerade eben:

1) $h(A) = g(f(A)) \quad \forall A \subseteq X$
2) $h^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B)) \quad \forall B \subseteq Z \quad (\rightarrow$ d.h. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1})$
3) Sind g und f injektiv / surjektiv, dann ist h inj / surj.
4) h surjektiv $\rightarrow$ g surjektiv
5) h injektiv $\rightarrow$ f injektiv

Für $f_1 \in B^A$, $f_2 \in C^B$, $f_3 \in D^C$ gilt Assoziativität:

6) $(f_1 \circ f_2) \circ f_3 = f_1 \circ (f_2 \circ f_3) =: f_1 \circ f_2 \circ f_3$

$\rightsquigarrow$ Übungen: Beweise

Definition 1.8: Zwei Mengen X und Y heißen gleichmächtig falls es ein bijektives $f \in X^Y$ (oder $f^{-1} \in Y^X$) gibt.
Eine Menge X heißt abzählbar unendlich, falls sie gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist. X heißt abzählbar, falls sie endlich oder abzählbar unendlich ist.

Relation $\sim$:

Bemerkungen: 1) Die Eigenschaft „gleichmächtig" ist eine transitive, d.h. $A \sim B$ und $B \sim C \Rightarrow A \sim C$. Dies folgt aus Lemma 1.7 (3).

FLA
7,0

2) Sind X und Y endlich, so sind sie gleichmächtig, wenn sie dieselbe Zahl an Elementen haben.
Für unendliche Mengen ist dieser Begriff zunächst paradox: $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_0$, denn $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$, $x \mapsto f(x) = x+1$ ist bijektiv!
Ebenso gilt: $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$ und $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$.

Lemma 1.9: Ist A abzählbar und $f: A \to B$ surjektiv, so ist auch B abzählbar.

Beweis: Falls A endlich ist, kann B höchstens so viele Elemente besitzen wie A, da sonst Surjektivität nicht gelten kann. Also ist B endlich und damit abzählbar.
Sei A also unendlich, gleichmächtig zu $\mathbb{N}$. Umbenennung der Elemente von A (durch die Bijektion möglich) o.E. $A = \mathbb{N}$.
f surjektiv $\Rightarrow f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset \; \forall b \in B$. Sei $g(b)$ das kleinste Element von $f^{-1}(\{b\})$; d.h. $g: B \to \mathbb{N}$, $b \mapsto g(b) = \min \{ f^{-1}(\{x\}) : x \in B \}$. Es ist $f(g(b)) = b$, weshalb $f \circ g = id_B$ folgt. id_B ist injektiv, weshalb nach Lemma 1.7(5) auch g injektiv sein muss. Es gibt also eine Bijektion zwischen B und $g(B)$ (Surjektivität ist klar), weshalb B und $g(B) \subseteq \mathbb{N}$ gleichmächtig sind. $g(B)$ kann also nur endlich oder abzählbar unendlich sein, also folgt die Abzählbarkeit von B.

vll. noch Relationen?

FLA

7, 1

<u>Definition 1.10:</u> Sei X eine Menge. Eine <u>Äquivalenzrelation</u> $\sim$ auf X hat die folgenden Eigenschaften $(x, y, z \in X)$:

i) $x \sim x$ (Reflexivität)

ii) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (Symmetrie)

iii) $x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (Transitivität)

Zu jedem $x \in X$ bildet man eine <u>Äquivalenzklasse</u>

$$[x] := \{y \in X : y \sim x\} \subseteq X.$$

<u>Lemma 1.11:</u> Sei X eine Menge und $\sim$ eine ÄR auf X. Dann ist X die disjunkte Vereinigung aller Äquivalenzklassen, d.h. $X = \dot{\bigcup}_{[x]} [x]$ (<u>Partition von X</u>)

<u>Beweis:</u> Wir zeigen: Sind zwei ÄK gleich, $[x] = [x']$, wenn gilt $x \sim x'$, und disjunkt, $[x] \cap [x']$, falls gilt $x \not\sim x'$. Sei also $x \sim x'$ und $y \in [x]$, $y' \in [x']$, dann folgt $y \sim x \sim x' \sim y' \Rightarrow y \in [x']$ und $y' \in [x]$. Damit ist $[x] = [x']$. Ist hingegen $x \not\sim x'$ dann folgt für $y \in [x]$ auch $y \not\sim x'$ (denn sonst $x \sim y \sim x' \Rightarrow x \sim x'$). Daher ist $y \notin [x']$ und $[x] \cap [x'] = \emptyset$. Damit ist X die Vereinigung ihrer (sogar paarweise) disjunkten Äquivalenzklassen. ■

<u>Beispiel:</u> Betrachte die Potenzmenge $P(X)$ und darauf die Relation $(A, B \in P(X))$: $A \sim B :\Leftrightarrow A \subseteq B$.

$\sim$ ist reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch:

i) $A \sim A$, denn $A \subseteq A$

ii) $A \sim B,\ B \sim C$, d.h. $A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$, also $A \sim C$

iii) Aus $A \subseteq B$ folgt nicht $B \subseteq C$!