

# Ferienkurs Elektrodynamik WS 11/12

## Übungsblatt 1

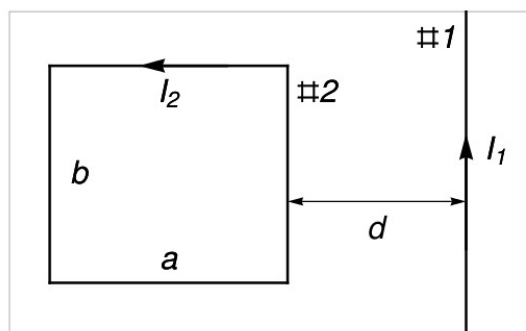
Tutoren:

Isabell Groß, Markus Krottenmüller, Martin Ibrügger

19.03.2012

### Aufgabe 1 - Wechselwirkung zwischen Drähten

Ein dünner rechteckiger Draht #2 befinde sich in der skizzierten Weise neben einem dünnen, unendlich langen Draht #1. Die Drähte werden von den Gleichströmen  $I_1$  und  $I_2$  durchflossen. Welche Kraft üben die Drähte aufeinander aus?



### Lösung:

Die Kraft zwischen den beiden Drähten bestimmt man über die Kraft, die das Magnetfeld des Drahtes #1 auf die Schleife #2 ausübt.

Das Magnetfeld eines stromführenden Drahtes bestimmt man über den Satz von Stokes und die Maxwell-Gleichung  $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$  und erhält:

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \frac{2I_1}{cr} \hat{\mathbf{e}}_\phi$$

Hier wurden Zylinderkoordinaten verwendet,  $r^2 = x^2 + y^2$  (mit dem Draht #1 auf der z-Achse). Das untere horizontale Segment der Drahtschleife #2 (mit der Länge a) liegt auf der negativen x-Achse. Damit steht auch die Richtung des Magnetfeldes

bei seiner Wirkung auf die Drahtschleife #2 fest:  $\mathbf{B}_1 \propto -\hat{\mathbf{e}}_y$  (Rechte-Hand-Regel). Das Magnetfeld, wie es insgesamt mit der Schleife #2 wechselwirkt, ist:

$$\mathbf{B}_1 = -\frac{2I_1}{cr} \hat{\mathbf{e}}_y$$

Die magnetische Kraft, die ein äußeres Magnetfeld  $\mathbf{B}$  auf ein Strom führendes Drahtelement  $d\mathbf{r}$  ausübt, ist:

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{r} \times \mathbf{B}$$

Die Kraft zwischen den beiden Drähten ist somit:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \oint_{\#2} I_2 d\mathbf{r} \times \mathbf{B}_1 \\ &= \frac{2I_1 I_2}{c} \left[ \left( \int_a^b \frac{1}{d} dz - \int_a^b \frac{1}{d+a} dz \right) \hat{\mathbf{e}}_x + \left( \int_d^{d+a} \frac{1}{x} dx - \int_d^{d+a} \frac{1}{x} dx \right) \hat{\mathbf{e}}_z \right] \\ &= \frac{2I_1 I_2}{c} \left( \frac{b}{a} - \frac{b}{d+a} \right) \hat{\mathbf{e}}_x \end{aligned}$$

Die beiden Drähte ziehen sich an. Die Kraft in  $x$ -Richtung entsteht durch die beiden senkrechten Drahtsegmente der Länge  $b$ , jeweils zu verschiedenen Abständen zum Draht #1. Die beiden waagrechten Anteile der Länge  $a$  heben sich bzgl. der Kräfte genau auf, einzeln sind sie in  $z$ -Richtung orientiert.

## Aufgabe 2 - Rotierender Zylinder

Ein unendlich langer Zylinder, der homogen mit der Ladungsdichte  $\rho$  geladen ist, rotiert starr um die Zylinderachse mit der Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$ . Geben Sie die Stromdichte  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  an und berechnen Sie unter der Annahme  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B(r)\hat{\mathbf{e}}_z$  das Magnetfeld innerhalb und außerhalb des Zylinders.

**Lösung:**

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r}) &= \rho \cdot \mathbf{v}(r) = \rho \Theta(R-r) \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \\ \text{with } \boldsymbol{\omega} &= \omega \hat{\mathbf{e}}_z \quad \mathbf{r} = r \hat{\mathbf{e}}_r \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}) &= \rho \omega r \Theta(R-r) \hat{\mathbf{e}}_\phi \end{aligned}$$

Wähle als Integrationsbereich ein Rechteck derart, dass die durch dieses aufgespannte Ebene die Zylinderachse enthält. Zwei Seiten sollen parallel zur Achse sein (Länge  $L$ ), zwei senkrecht. Die senkrechten Seiten haben im Ampereschen Gesetz keinen Beitrag.

$$\begin{aligned} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \frac{4\pi I_{\text{eing}}}{c} \\ \Rightarrow L B_{\text{out}} &= 0 \\ L B_{\text{in}} &= \frac{4\pi}{c} I_{\text{eing}} = \frac{4\pi}{c} \int_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{a} = \frac{4\pi}{c} L \int_r^R dr' \rho \omega r' \\ B_{\text{in}} &= \frac{2\pi \rho \omega}{c} (R^2 - r^2) \Theta(R-r) \end{aligned}$$

### Aufgabe 3 - Rotierende Scheibe

Eine unendlich dünne runde Scheibe mit Radius  $R$  ist homogen geladen. Die Scheibe liege in der  $xy$ -Ebene mit ihrem Mittelpunkt im Ursprung und rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  um die  $z$ -Achse. Bestimmen Sie die asymptotische Form des Magnetfeldes  $\mathbf{B}$  mithilfe des Dipolmoments  $\mathbf{m}$ . Berechnen Sie außerdem das exakte Feld auf der Symmetrieachse, also  $\mathbf{B}(0, 0, z)$  und vergleichen Sie mit der Dipolnäherung.

#### Lösung:

Die Stromdichte beträgt (mit  $\varrho$  dem Radius in Zylinderkoordinaten):

$$\begin{aligned}\rho(\varrho) &= \sigma\Theta(R - \varrho) \\ \mathbf{j}(\varrho) &= \mathbf{v}\rho(\varrho) \quad \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \\ \mathbf{j}(\varrho) &= \omega\varrho\sigma\Theta(R - \varrho)\hat{\mathbf{e}}_\phi\end{aligned}$$

Für das magnetische Moment folgt:

$$\begin{aligned}\mathbf{m} &= \frac{1}{2c} \int d^3\varrho' (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')) = \frac{1}{2c} \int_0^R d\varrho' \varrho' \int_0^{2\pi} d\phi (\varrho' \hat{\mathbf{e}}_{\varrho'} \times \omega \varrho' \sigma \hat{\mathbf{e}}_\phi) \\ &= \frac{1}{2c} \int_0^R d\varrho' \int_0^{2\pi} d\phi \varrho'^3 \omega \sigma \hat{\mathbf{e}}_z = \frac{\pi R^4 \omega \sigma}{4c} \hat{\mathbf{e}}_z\end{aligned}$$

Das Magnetfeld ist:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - r^2 \mathbf{m}}{r^5}$$

mit  $\mathbf{m} = m \hat{\mathbf{e}}_z$  und  $\mathbf{r} = \varrho \hat{\mathbf{e}}_r + z \hat{\mathbf{e}}_z$

Komponentenweise:

$$\begin{aligned}B_\varrho &= \frac{3mz\varrho}{r^5} = \frac{\pi R^4 \omega \sigma}{4c} \frac{3z\varrho}{(\varrho^2 + z^2)^{5/2}} \\ B_\phi &= 0\end{aligned}$$

$$B_z = \frac{3z^2 m}{r^5} - \frac{r^2 m}{r^5} = \frac{\pi R^4 \omega \sigma}{4c} \left( \frac{2z^2 - \varrho^2}{(\varrho^2 + z^2)^{5/2}} \right)$$

Die Berechnung des exakten Feldes auf der z-Achse erfolgt über Biot-Savart:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = \begin{pmatrix} -\varrho' \cos \phi' \\ -\varrho' \sin \phi' \\ z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{j}(\varrho') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \omega \varrho' \sigma \Theta(R - \varrho') \begin{pmatrix} -\sin \phi' \\ \cos \phi' \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\varrho' \cos \phi' \\ -\varrho' \sin \phi' \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \omega \varrho' \sigma \Theta(R - \varrho') \begin{pmatrix} z \cos \phi' \\ z \sin \phi' \\ \varrho' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}(0, 0, z) = \frac{1}{c} \int_0^R d\varrho' \varrho' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{\omega \varrho' \sigma}{(\varrho'^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} z \cos \phi' \\ z \sin \phi' \\ \varrho' \end{pmatrix}$$

$$B_\varrho(0, 0, z) = 0$$

$$B_\phi(0, 0, z) = 0$$

$$B_z(0, 0, z) = \frac{2\pi\omega\sigma}{c} \int_0^R d\varrho' \frac{\varrho'^3}{(\varrho'^2 + z^2)^{3/2}} \stackrel{\text{Bronstein Int. 209}}{=} \frac{2\pi\omega\sigma}{c} \left[ \sqrt{\varrho'^2 + z^2} + \frac{z^2}{\sqrt{\varrho'^2 + z^2}} \right] \Big|_0^R$$

$$= \frac{2\pi\omega\sigma}{c} \left( \frac{2z^2 + R^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 2z \right)$$

Für das über das Dipolmoment berechnete Feld gilt auf der z-Achse:

$$B_z(0, 0, z) = \frac{\pi R^4 \omega \sigma}{2c} \frac{1}{z^3}$$

# Ferienkurs Elektrodynamik

Elektrische und Magnetische Felder in polarisierbarer Materie

Stand: 20. März 2012

## Übungsblatt WS11/12

### 1. Dielektrische Kugel im äußeren E-Feld

In einem homogenen elektrischen Feld mit  $\vec{E}_o = E_o \cdot \vec{e}_z$  ( $\vec{e}_z$  ist der Einheitsvektor in z-Richtung) befinde sich eine dielektrische Kugel mit dem Radius R und der Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$ .

a) Berechnen sie das Elektrische Feld innerhalb und außerhalb der Kugel mit dem Ansatz:

$$\phi(r, \theta) = \sum_l (A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}) P_l(\cos\theta) \quad (0.1)$$

$A_l$  und  $B_l$  sind dabei zu bestimmende Unbekannte,  $P_l(\cos)$  die Legendre-Polynome.

b) Berechnen sie die Polarisierung und die Oberflächenladungsdichte der Kugel.

#### Lösungsvorschlag:

Lösungsweg analog zu 'Magnetisierbare Kugel im B-Feld', siehe auch Vorlesung.

a) Ergebnisse:

$$\vec{E}_i = \frac{3}{\epsilon + 2} E_o \vec{e}_z \quad (0.2)$$

$$\vec{E}_a = E_o \vec{e}_z + \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} E_o R^3 \frac{3 \cos(\theta) \vec{e}_r - \vec{e}_z}{r^3} \quad (0.3)$$

b)

$$\vec{P} = \frac{\vec{d}}{V} = \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}\right) E_o \frac{3}{4\pi} \quad (0.4)$$

$$\sigma = \frac{\Delta Q_{pol}}{\Delta F} \quad (0.5)$$

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} d^3r = - \int_V \rho_{pol} d^3r = -\Delta Q_{pol} \quad (0.6)$$
$$\stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{\Delta F} d\vec{f} \cdot \vec{P} = \Delta F \vec{n} \cdot \vec{P} = -\Delta F \vec{e}_r \cdot \vec{P}$$

$$\Rightarrow \sigma_{pol} = \vec{e}_r \cdot \vec{P} = \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} E_o \quad (0.7)$$

### 2. Magnetisierbare Kugel im äußeren B-Feld

In einem homogenen Feld  $\vec{B}_0 = B_0 \cdot \vec{e}_z$  ( $\vec{e}_z$  ist der Einheitsvektor in z-Richtung) befindet sich eine magnetische Kugel mit dem Radius R und der Dielektrizitätskonstante  $\mu$ .

- a) Berechnen sie das magnetische Feld  $\vec{H}$  innerhalb und außerhalb der Kugel.  
Hinweis: Sind keine freien Ströme vorhanden, kann  $\vec{H}$  als Gradient eines Skalarfeldes ausgedrückt werden. (Analog zum Elektrischen Feld)
- b) Berechnen sie die Magnetisierung der Kugel und diskutieren sie die Fälle  $\mu > 1$  und  $\mu < 1$ .
- c) Was würde sich bei der Berechnung ändern, wenn sich auch außerhalb der Kugel ein magnetisierbares Material befinden würde  $\mu_a \neq \mu$  ?

**Lösungsvorschlag:**

- a) Da keine freien Ströme vorhanden sind, kann  $\vec{H}$  als Gradient eines Skalarfeldes ausgedrückt werden:  $\vec{H} = -\vec{\nabla}\Phi_M$

Die allgemeine Lösung der Laplace Gleichung in Kugelkoordinaten ist:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (A_{lm}r^l + \frac{B_{lm}}{r^{r+l}})P_{lm}(\cos \theta)e^{im\phi} \quad (0.8)$$

bei azymutaler Symmetrie (m=0) vereinfacht sich dies zu:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + \frac{B_l}{r^{r+l}})P_l(\cos \theta) \quad (0.9)$$

Es ergibt sich für das magnetische Potential innerhalb und außerhalb der Kugel:

Innen:  $\Phi_i(r, \theta) = \sum_l (A_l r^l)P_l(\cos \theta)$

Außen:  $\Phi_a(r, \theta) = \sum_l (B_l r^l + \frac{C_l}{r^{r+l}})P_l(\cos \theta)$

**Aufstellung der Randbedingungen:**

z → ∞:

es soll gelten:  $\vec{B}_0(\infty) = B_0\vec{e}_z$ ,  $\vec{B}_i = \mu\vec{H}$ ,  $\vec{B}_a = \vec{H}$

mit  $\vec{H} = -\vec{\nabla}\Phi_M$  ergibt sich:

$$\Phi_a = -B_0z = -B_0r \cos \theta \quad (0.10)$$

durch Vergleich mit  $\Phi_a$  erkennt man, dass  $B_l = -B_0$  sein muss, und  $l = 1$  gelten muss.

Tangentialbedingung für H:

allgemein:

$$\vec{H} = -\vec{\nabla}\Phi = -\left[\frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta\right] \quad (0.11)$$

Tangentialbedingung:

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \theta} \Big|_{r=R} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta} \Big|_{r=R} \quad (0.12)$$

Normalbedingung für B

$$-\mu \frac{\partial \Phi_a}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \Big|_{r=R} \quad (0.13)$$

daraus erhält man für die Koeffizienten (einsetzen und nach  $A_1$  und  $C_1$  auflösen!):

$$A_1 = -\frac{3}{2+\mu} B_0 \quad (0.14)$$

$$C_1 = -B_0 \frac{1-\mu}{\mu+2} \quad (0.15)$$

Damit ergibt sich für das Potential:

$$\Phi_i = -\frac{3}{2+\mu} B_0 r \cos \theta \quad (0.16)$$

$$\Phi_a = -B_0 r \cos \theta + \frac{\cos \theta}{r^2} R^3 \frac{\mu-1}{\mu+2} B_0 \quad (0.17)$$

und für das H-Feld:

$$\vec{H}_i = \frac{3}{2+\mu} E_0 \vec{e}_z \quad (0.18)$$

$$\vec{H}_a = -B_0 \vec{e}_z + \frac{\mu-1}{\mu+2} B_0 R^3 \frac{3 \cos \theta \vec{e}_r - \vec{e}_z}{r^3} \quad (0.19)$$

**b)** Dies lässt sich umschreiben zu:

$$\vec{H}_a = B_0 \vec{e}_z + \frac{3 \vec{e}_r (\vec{m} \cdot \vec{e}_r) - \vec{m}}{r^3} \quad (0.20)$$

Darauf kann man das magnetische Dipolmoment und somit die Magnetisierung ( $\vec{M} = \frac{\vec{m}}{V}$ ,  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ ) bestimmen:

$$\vec{m} = \frac{\mu-1}{\mu+2} B_0 R^3 \vec{e}_z \quad (0.21)$$

$$\vec{M} = \frac{\mu-1}{\mu+2} B_0 \frac{3}{4\pi} \vec{e}_z \quad (0.22)$$

Für  $\mu > 1$  ist die Magnetisierung parallel zu  $\vec{B}_0$ . Die Dipole im Medium richten sich parallel zum Magnetfeld aus. → Paramagnet

Für  $\mu < 1$  ist die Magnetisierung antiparallel zu  $\vec{B}_0$ . Induzierte Ströme im Material wirken dem äußeren Magnetfeld entgegen. → Diamagnet

- c) Es würde sich für  $B_1 \frac{\vec{E}_0}{\mu_a}$  ergeben. Außerdem muss bei der Normalbedingung für B auf der rechten Seite auch mit  $\mu_a$  multipliziert werden.

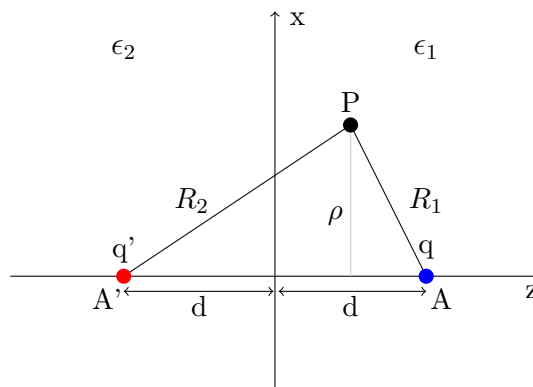
### 3. Spiegelladung mit Dielektrikum

Eine Punktladung  $q$  im Raum mit  $\epsilon_1$  befindet sich im Abstand  $d$  von einer ebenen Grenzfläche (bei  $z = 0$ ) zu einem dielektrischen Medium mit der Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_2$ . Bestimmen sie das erzeugte elektrische Feld mit der Methode der Spiegelladungen.

#### Lösungsvorschlag:

Wiederholung: Die Methode der Spiegelladung eignet sich für Probleme, bei denen sich eine oder mehrere Punktladungen in der Nähe von Randflächen befinden. Man versucht mit einer kleinen Anzahl von Ladungen, die außerhalb des interessierenden Gebiets geeignet platziert werden und eine geeignete Stärke haben, die geforderten Randbedingungen zu simulieren.

Hier sieht die Anordnung nach Ersetzen des Grenzgebietes durch eine Spiegelladung folgendermaßen aus:



Mit der Spiegelladung  $q'$  am spiegelsymmetrischen Punkt  $A'$  kann man das Potential für  $z > 0$  schreiben als:

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left( \frac{q}{R_1} + \frac{q'}{R_2} \right) \quad (0.23)$$

wobei  $R_1$  und  $R_2$  folgendermaßen ausgedrückt werden können:

$$R_1 = \sqrt{\rho^2 + (d - z)^2} \quad R_2 = \sqrt{\rho^2 + (d + z)^2} \quad (0.24)$$

Wir nehmen an, dass das Potential für  $z < 0$  äquivalent ist zu dem einer Ladung  $q''$  an der Stelle  $A$  der tatsächlichen Ladung  $q$ . Damit lautet das Potential:

$$\Phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q''}{R_1} \quad (0.25)$$

Die Randbedingungen bei  $x = 0$ :

$$\epsilon_1 E_z^1 = \epsilon_2 E_z^2 \quad E_x^1 = E_x^2 \quad E_y^1 = E_y^2 \quad (0.26)$$



also für die z-Komponente

$$\epsilon_1 \frac{\partial}{\partial z} \Phi_1 = \epsilon_2 \frac{\partial}{\partial z} \Phi_2 \quad (0.27)$$

und mit

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R_1} \right) \Big|_{z=0} = - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R_2} \right) \Big|_{z=0} = \frac{d}{(\rho^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (0.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{R_1} \right) \Big|_{z=0} = - \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{R_2} \right) \Big|_{z=0} = \frac{-\rho}{(\rho^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (0.29)$$

führen auf die Forderungen:

$$q - q' = q'' \quad \frac{1}{\epsilon_1} (q + q') = \frac{1}{\epsilon_2} q'' \quad (0.30)$$

Diese Gleichung kann man nach den Spiegelladung auflösen und man erhält:

$$q' = - \left( \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) q \quad q'' = - \left( \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \right) q \quad (0.31)$$

Schließlich müssen nur noch die q's in die Formel für  $\vec{E}$  eingesetzt werden:

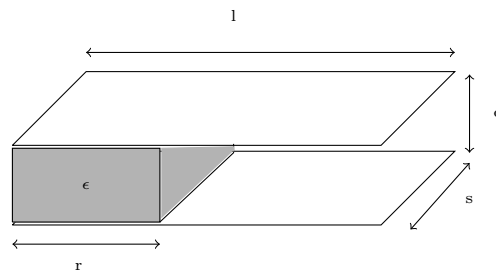
$$\vec{E}(\vec{r})_{>} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1} \left( q \frac{\vec{R}_1}{|R_1|^3} + q' \frac{\vec{R}_2}{|R_2|^3} \right) \quad (0.32)$$

und

$$\vec{E}(\vec{r})_{<} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_2} q'' \frac{\vec{R}_1}{|R_1|^3} \quad (0.33)$$

#### 4. Plattenkondensator mit Dielektrikum

Zwischen zwei rechteckigen, unendlich dünnen Metallplatten der Fläche  $l \times s$ , die parallel im Abstand  $d$  liegen, ist ein Dielektrikum  $\epsilon$  mit den Ausmaßen  $r \times s \times d$  eingeschoben. Die obere/ untere Platte trägt die Ladung  $+Q/-Q$ . Da die Platten leitend sind, sind die Ladungsträger auf den Platten frei verschiebbar. Die z-Achse steht senkrecht auf den Platten.



a) Berechnen sie  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$  und die Oberflächenladungsdichte, jeweils in Region I (mit Dielektrikum) und in Region II (ohne Dielektrikum).

b) Wie groß ist die Kapazität ( $C = \frac{Q}{\Delta\Phi}$ ) dieser Anordnung?

**Lösungsvorschlag:**

a) Es gilt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{frei} \quad (0.34)$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial z} D_z = \rho_{frei} \quad (0.35)$$

Da sich freie Ladungen nur auf der Oberfläche der Platten befinden können, hat die Ladungsdichte folgende Form:

$$\rho_{frei} = \sigma[\delta(z) + \delta(z - a)] \quad (0.36)$$

damit ergibt sich:

$$D_z = \int \sigma[\delta(z) + \delta(z - a)] dz = \sigma(z = 0, d) \quad (0.37)$$

$$\vec{D}_I = \sigma_I \vec{e}_z \quad (0.38)$$

$$\vec{D}_{II} = \sigma_{II} \vec{e}_z \quad (0.39)$$

Die Tangentialkomponenten von  $\vec{E}$  müssen stetig sein, also gilt für den Plattenkondensator:

$$E_I = E_{II} \quad D_I = \epsilon D_{II} \quad \sigma_I = \epsilon \sigma_{II} \quad (0.40)$$

Da die Gesamtladung einer Platte Q beträgt muss gelten:

$$Q = \sigma_I s r + \sigma_{II} (l - s) s = \sigma_{II} s [s\epsilon + (l - r)] \quad (0.41)$$

daraus folgt:

$$\sigma_{II} = \frac{Q}{s(l + r(\epsilon - 1))} \quad \sigma_I = \frac{\epsilon Q}{s(l + r(\epsilon - 1))} \quad (0.42)$$

und damit ( $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{D}$ ):

$$D_I = \frac{\epsilon Q}{s(l + r(\epsilon - 1))} \quad E_I = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{s(l + r(\epsilon - 1))} \quad (0.43)$$

$$D_{II} = \frac{Q}{s(l + r(\epsilon - 1))} \quad E_{II} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{s(l + r(\epsilon - 1))} \quad (0.44)$$

b) Die Kapazität eines Plattenkondensators ergibt sich zu:

$$C = \frac{Q}{\Delta\Phi} = \frac{Q}{E \cdot d} = \frac{\epsilon_0 s (r(\epsilon - 1) + l)}{d} \quad (0.45)$$