Ferienkurs Experimentalphysik 1
2012

Musterlösung Probeklausur

1. Atwoodsche Fallmaschine

Betrachten Sie die abgebildete Atwoodsche Fallmaschine. Der die Massen m_1 und m_2

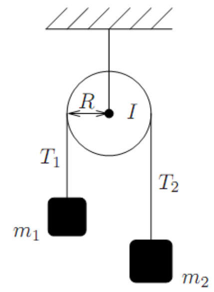


Abbildung 1: Atwoodsche Fallmaschine

verbindende masselose Faden läuft ohne zu rutschen und ohne Längenänderung über die reibungsfrei drehbare Rolle mit Radius R und Trägheitsmoment I. Berechnen Sie die Winkelbeschleunigung der Rolle.

Lösung:

Es bezeichnen x_1 bzw. x_2 die Abstände der beiden Massen von der Aufhängung (nach

unten positiv) und T_1 bzw. T_2 die Spannungen der Fäden. Dann gelten für die Massen die Bewegungsgleichungen:

$$m_1\ddot{x}_1 = m_1 g - T_1$$

$$m_2\ddot{x}_2 = m_2 g - T_2$$

Da der Faden nicht rutschen soll, gibt es einen Zusammenhang zwischen der Winkelgeschwindigkeit ω der Rolle (positiv im Uhrzeigersinn) und den Geschwindigkeiten der beiden Massen:

$$R\omega = \dot{x}_2$$

$$-R\omega = \dot{x}_1$$

Als letzte Gleichung hat man noch die Bewegungsgleichung der Rolle:

$$I\dot{\omega} = R(T_2 - T_1)$$

(vorzeichenrichtig). Dies sind nun 5 Gleichungen mit 5 Unbekannten. Als erstes eliminiert man $\ddot{x}_1$ und $\ddot{x}_2$ durch $\dot{\omega}$. Dadurch ergeben sich die folgenden Gleichungen

$$-m_1 R\dot{\omega} = m_1 g - T_1$$

$$m_2 R\dot{\omega} = m_2 g - T_2$$

$$I\dot{\omega} = R(T_2 - T_1)$$

Dann liefert Einsetzen der beiden ersten Gleichungen in die dritte eine Gleichung für $\dot{\omega}$:

$$I\dot{\omega} = R\left((m_2 g - m_2 R\dot{\omega}) - (m_1 g + m_1 R\dot{\omega})\right)$$

also

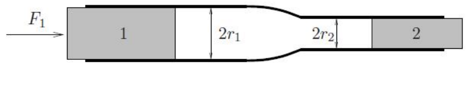
$$(I + (m_1 + m_2)R^2)\dot{\omega} = gR(m_2 - m_1)$$

und

$$\dot{\omega} = \frac{gR(m_2 - m_1)}{I + (m_1 + m_2)R^2}$$

2. Wasserführendes Rohr

Betrachten Sie ein gerades wasserführendes Rohr, das sich vom Radius r_1 auf den Radius r_2 verengt und auf beiden Seiten mit beweglichen Kolben verschlossen ist (s. Abbildung). Auf den linken Kolben wird zusätzlich zum Atmosphärendruck p_0 die Kraft F_1 ausgeübt, auf den rechten Kolben wirkt von außen nur der Atmosphärendruck. Das System befinde sich in einem stationären Zustand. Betrachten Sie das Wasser als inkompressibel und reibungsfrei.



a) Wie groß ist der Druck im Wasser vor der Verengung (p_1) und nach der Verengung (p_2)?

b) Wie groß sind die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 der beiden Kolben?

c) Mit welcher Kraft F_2 wird der rechte Kolben aus dem Rohr herausgedrückt?

d) Was geschieht im Fall $r_1 = r_2$?

Lösung:

a) Für die stationäre Strömung gelten die Kontinuitätsgleichung

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

mit den Querschnittflächen $A_1 = \pi r_1^2$ und $A_2 = \pi r_2^2$, sowie die Bernoulli-Gleichung

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

Da das System stationär sein soll, muss an beiden Kolben Kräftegleichgewicht herrschen, d.h.

$$\underline{\underline{p_1 = p_0 + \frac{F_1}{A_1} \quad \text{und} \quad p_2 = p_0.}}$$

Von innen wirkt auf beide Kolben tatsächlich nur der jeweilige statische Druck des Wassers, da an der Berührungsfläche Wasser-Kolben das Wasser relativ zum Kolben ruht.

b) Mit dem Ergebnis aus a) kann man nun das System aus Kontinuitätsgleichung und Bernoulli-Gleichung nach den Geschwindigkeiten auflösen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
p_0 + \frac{F_1}{A_1} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 &= p_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \\
\frac{F_1}{A_1} + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) &= 0 \\
\frac{F_1}{A_1} + \frac{1}{2}\rho\left(v_1^2 - \frac{A_1^2}{A_2^2}v_1^2\right) &= 0 \\
\frac{F_1}{A_1} - \frac{1}{2}\rho\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2}v_1^2 &= 0
\end{aligned}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2F_1}{\rho}} \frac{A_2}{\sqrt{A_1(A_1^2 - A_2^2)}}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2F_1}{\rho}} \frac{A_1}{\sqrt{A_1(A_1^2 - A_2^2)}}$$

Beide Ausdrücke sind reell für $A_2 < A_1$.

c) Die Drücke p_1 und p_2 sind bereits oben bestimmt worden. Die Kraft mit der der rechte Kolben herausgedrückt wird, ist

$$F_2 = A_2 p_2 = A_2 p_0.$$

d) Für $r_1 = r_2$, also $A_1 = A_2$ werden die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 für ein nicht verschwindendes F_1 singulär. Das bedeutet, dass sich kein stationärer Zustand einstellen wird, was physikalisch recht plausibel ist.

3. Antarktis-Park

In der Antarktis gibt es einen Antarktis-Park, ein beliebter Zeitvertreib für Pinguine. Eine besondere Attraktion ist eine scheibenförmige Eisscholle (Fläche A, Eisdicke D, Eisdichte ρ_E), die im Meer schwimmt (Wasserdichte ρ_W).

a) Welcher Volumenanteil des Eises befindet sich oberhalb der Wasseroberfläche?

b) Mit größtem Vergnügen springen Pinguine auf der Eisscholle so auf und ab, dass die Scholle anfängt zu schwingen. Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Systems auf und lösen Sie diese allgemein. Mit welcher Periode T müssten die Pinguine springen, um die Scholle in der Resonanzfrequenz anzuregen (Masse der Pinguine und Reibung werden vernachlässigt)?

c) Wie groß müsste die Gesamtmasse der Pinguine auf der Eisscholle sein, damit ihr Gewicht die Scholle völlig untertaucht? (Wir nehmen an, dass sie erschöpft sind und nicht mehr springen.)

d) Aufgrund der globalen Erwärmung schmilzt die Eisscholle. Wie ändert sich dadurch der Wasserspiegel des Meeres? Begründen Sie Ihre Antwort. Die Temperatur des Meerwassers wird als unverändert angenommen. (Die Pinguine werden für diesen Teil der Aufgabe nicht berücksichtigt. Sie haben sich längst aus dem Staub (aus dem Schnee?) gemacht.)

Lösung:

a) Die Masse des Eises beträgt $M_\mathrm{E} = \rho_\mathrm{E} A D$. Die Masse des verdrängten Wassers beträgt $M_\mathrm{W} = \rho_\mathrm{W} A(D - x)$, wobei x die Höhe der Eisschicht ist, die aus dem

Wasser ragt. Da sich das System im Gleichgewicht befindet muss die Gewichtskraft des Eises der Auftriebskraft durch das verdrängte Wasser entsprechen. Es gilt also $M_\mathrm{E}g = M_\mathrm{W}g$ woraus

$$\frac{x}{D} = \frac{V_\mathrm{E}^\mathrm{oberhalb}}{V_\mathrm{E}} = 1 - \frac{\rho_\mathrm{E}}{\rho_\mathrm{W}}$$

folgt.

b) Die x-Achse zeige nach oben. Die einwirkenden Kräfte sind die Auftriebskraft durch das verdrängte Wasser nach oben und die Gewichtskraft des Eises nach unten. Die Bewegungsgleichung lautet also

$$M_\mathrm{E}\ddot{x} = \rho_\mathrm{W}Ag(D - x) - \rho_\mathrm{E}AgD,$$

welche der DGL der gedämpften Schwingung

$$\ddot{x} + \frac{\rho_\mathrm{W}Ag}{M_\mathrm{E}}x = \frac{\rho_\mathrm{W} - \rho_\mathrm{E}}{M_\mathrm{E}}ADg = g\left(\frac{\rho_\mathrm{W}}{\rho_\mathrm{E}} - 1\right)$$

entspricht. Die Schwingungsfrequenz lässt sich wie immer direkt ablesen

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho_\mathrm{W}Ag}{M_\mathrm{E}}} = \sqrt{\frac{\rho_\mathrm{W}g}{\rho_\mathrm{E}D}}.$$

Die Lösung der homogenen DGL ist die bekannte Schwingungsfunktion

$$x_\mathrm{h}(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t).$$

Da die Inhomogenität hier nur eine Konstante ist, wählen wir als Ansatz ebenfalls eine konstante Funktion $x_\mathrm{p}(t) = C$. Eingesetzt in die DGL ergibt sich

$$x_\mathrm{p}(t) = C = \frac{g\left(\frac{\rho_\mathrm{W}}{\rho_\mathrm{E}} - 1\right)}{\omega^2} = \frac{M_\mathrm{E}(\rho_\mathrm{W} - \rho_\mathrm{E})}{A\rho_\mathrm{W}\rho_\mathrm{E}}.$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$x(t) = x_\mathrm{h}(t) + x_\mathrm{p}(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{\rho_\mathrm{W}g}{\rho_\mathrm{E}D}}t\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{\rho_\mathrm{W}g}{\rho_\mathrm{E}D}}t\right) + \frac{M_\mathrm{E}(\rho_\mathrm{W} - \rho_\mathrm{E})}{A\rho_\mathrm{W}\rho_\mathrm{E}}.$$

Die Eigenfrequenz ω des Systems ist die Resonanzfrequenz mit der die Pinguine die Eisscholle anregen müssten. Sie müssten also mit der Periode

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_\mathrm{E}D}{\rho_\mathrm{W}g}}$$

auf und ab springen.

c) Nun muss die Gewichtskraft der Eisscholle inklusive der Pinguine gerade gleich der

Auftriebskraft durch das verdrängte Wasser sein. Es gilt also

$$\rho_\mathrm{E} ADg + mg = \rho_\mathrm{W} ADg.$$

Man erhält somit für die Masse der Pinguine

$$m = (\rho_\mathrm{W} - \rho_\mathrm{E}) AD.$$

d) Nach dem Schmelzen nimmt das Eis folgendes Volumen ein

$$V = \frac{M_\mathrm{E}}{\rho_\mathrm{W}} = \frac{\rho_\mathrm{E}}{\rho_\mathrm{W}} AD.$$

Dies ist das Wasservolumen, das die Eisscholle verdrängt hat. Somit ändert sich der Meeresspiegel beim Schmelzen nicht.

4. Meteor

Ein großer Meteor (Masse m_1, Geschwindigkeit $\vec{v_1}$) stoße zentral und völlig inelastisch mit einem Planeten (Masse m_2, Geschwindigkeit $\vec{v_2}$) zusammen. Die Eigenrotation der beiden Himmelskörper ist vernachlässigbar klein.

(a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit v' des Planeten nach dem Stoß, wenn $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ parallel bzw. antiparallel gerichtet waren.

(b) Der Stoß erfolge nun nicht zentral, so dass der Planet nach dem Stoß rotiert, d.h. Drehimpuls $\vec{L} \neq 0$. Hatte das System bereits vor dem Zusammenstoß den Drehimpuls $\vec{L}$? Geben Sie eine kurze Erklärung!

(c) Ändert sich die Geschwindigkeit v' bei b) verglichen mit a) gesetzt den Fall, dass auch bei b) der Zusammenstoß vollkommen inelastisch sei? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

(a) Da der Stoß inelastisch erfolgt, gilt natürlich die Impulserhaltung:

$$m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = (m_1 + m_2)\vec{v}$$

Daher gilt für den Fall, dass $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ parallel sind:

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

und für den Fall, dass $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ antiparallel sind:

$$v' = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

(b) Beide Körper drehen sich zwar nicht vor dem Stoß, aber das Gesamtsystem hat einen vom Koordinatensystem abhängigen Drehimpuls. Dieser Drehimpuls bleibt erhalten.

(c) Der Impulserhaltungssatz gilt unabhängig vom Drehimpuls. Daher bleibt v' gleich, auch wenn der Stoß nicht zentral erfolgt.

5. Lichtimpuls

In einem Inertialsystem S ruht bei $x = 0$ ein Sender, der zum Zeitpunkt $t = \tau$ einen Lichtimpuls in positive x-Richtung ausstrahlt. Das Inertialsystem S' bewege sich relativ zu S mit der Geschwindigkeit v in positive x-Richtung. In S' ruht bei $x' = 0$ ein Empfänger.

a) Zeigen Sie: Wenn der Lichtimpuls empfangen wird, hat der Empfänger bezüglich S den Ort

$$x = \frac{v\tau}{1 - \frac{v}{c}}$$

und die Uhr von S zeigt die Zeit

$$t = \frac{\tau}{1 - \frac{v}{c}}$$

b) Benutzen Sie das Ergebnis von Teilaufgabe a) um die Ankunftszeit des Lichtimpulses bezüglich S' zu berechnen.

Lösung:

a) Vom System S aus wird die Bewegung des Lichtimpulses durch

$$x = c(t - \tau)$$

und die des Empfängers durch

$$x = vt$$

beschrieben. Gleichsetzen und Auflösen nach t ergibt

$$t = \frac{\tau}{1 - \frac{v}{c}}$$

und daraus folgt x zu

$$x = \frac{v\tau}{1 - \frac{v}{c}}$$

b) Mit Hilfe der Lorentz-Transformation ergibt sich

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) = \gamma\left(\frac{\tau}{1-\frac{v}{c}} - \frac{v}{c^2}\frac{v\tau}{1-\frac{v}{c}}\right) = \gamma\left(\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v}{c}}\right)\tau = \\ &= \gamma\left(1+\frac{v}{c}\right)\tau = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{v}{c}\right)\left(1+\frac{v}{c}\right)}}\left(1+\frac{v}{c}\right)\tau = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}\,\tau \end{aligned}$$

6. Schiefe Ebene

Ein Klotz mit einem Gewicht von $500g$ liegt auf einer schiefen Ebene. Der Haftreibungskoeffizient zwischen Klotz und Ebene beträgt $0,75$, der Gleitreibungskoeffizient $0,5$. Wie groß muss der Neigungswinkel der Ebene mindestens sein, damit sich der Klotz in Bewegung setzt? Auf einer Ebene mit einem Neigungswinkel von $60°$ würde er sich also in Bewegung setzen. Der Klotz wird nun in einer (vertikalen) Hohe von $50cm$ losgelassen, rutscht die schiefe Ebene hinunter und auf der Horizontalen weiter, bis er von allein zum Stillstand kommt. Berechnen Sie den Ort, an dem der Klotz zur Ruhe kommt. (Eventuelle Probleme beim Übergang von der Schräge in die Horizontale sollen dabei vernachlässigt werden!)