Ferienkurs Experimentalphysik 1
2012

Übung 2

1. Masse am Zylinder

Ein Zylinder mit dem Radius R, der Masse M und dem Trägheitsmoment $I = \frac{1}{2}MR^2$ ist raumfest so gelagert, dass er um seine horizontal liegende Symmetrieachse rotieren und sich ansonsten nicht bewegen kann. Eine Schnur wird um den Zylinder gewickelt und die Masse m angehängt. Bestimmen Sie die lineare Beschleunigung der angehängten Masse, die Winkelbeschleunigung des Zylinders, die Spannung in der Schnurz sowie die vertikale Kraft, die den Zylinder trägt. **Lösung:**

Die Seilspannung sei T und die positive $x-$Achse zeige vertikal nach unten. Die Vor-

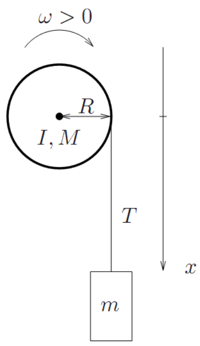

Abbildung 1: Skizze zu A1

zeichenkonvention für ω ist so wie in der Skizze gezeigt. Es sind andere Konventionen möglich, diese müssen aber konsistent sein. Man bekommt drei Bewegungsgleichungen: Eine für die Rotation des Zylinders, eine für die lineare Beschleunigung der angehängten Masse und eine Zwangsbedingung durch den Faden, die die beiden Bewegungsgleichungen verknüpft.

$$I\dot{\omega} = RT$$

$$m\ddot{x} = mg - T$$

$$\ddot{x} = R\dot{\omega}$$

Die Vorzeichen sind korrekt im Sinne der gewählten Konvention, z.B. führt eine positive Fadenspannung zu einer positiven Winkelbeschleunigung. Dies sind drei Gleichungen für

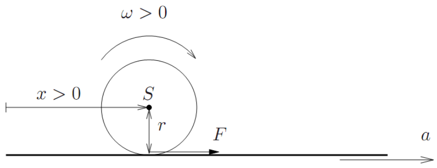

Abbildung 2: Skizze zu A2

drei Unbekannte $\dot{\omega}, \ddot{x}$ und T. Elimination von $\ddot{x}$ führt zu:

$$I\dot{\omega} = RT$$

$$mR\dot{\omega} = mg - T$$

Multiplikation der zweiten Gleichung mit r und Addition zur ersten Gleichung liefert eine Gleichung für $\dot{\omega}$

$$(I + mR^2)\dot{\omega} = mgR$$

also

$$\dot{\omega} = \frac{mgR}{I + mR^2} = \frac{\frac{g}{R}}{1 + \frac{M}{2m}}$$

Für die lineare Beschleunigung folgt

$$\ddot{x} = R\dot{\omega} = \frac{g}{1 + \frac{M}{2m}}$$

und für die Seilspannung

$$T = \frac{I\dot{\omega}}{R} = \frac{\frac{Mg}{2}}{1 + \frac{M}{2m}}$$

Die Tragkraft F ist schließlich die Summe aus Seilspannung und Gewichtskraft des Zylinders:

$$F = \frac{\frac{Mg}{2}}{1 + \frac{M}{2m}} + Mg$$

2. Zylinder auf ebener Unterlage

Auf einer ebenen horizontalen Unterlage kann ein Zylinder rollen ohne zu rutschen. Die Masse des Zylinders sei $m = 2kg$, sein Radius $r = 5cm$ und das Trägheitsmoment um seinen Schwerpunkt sei $I = 0,003kg\ m^2$. Der Schwerpunkt S des Zylinders befinde sich auf seiner Symmetrieachse. Nun wird die Unterlage mit der Beschleunigung $a = 1\frac{m}{s^2}$ unter dem Zylinder weggezogen (siehe Skizze).

(a) Berechnen Sie (vorzeichenrichtig!) die Winkelbeschleunigung und die Translationsbeschleunigung des Zylinders.

(b) Wie groß muss der Haftreibungskoeffizient μ_H zwischen Zylinder und Unterlage mindestens sein, damit der Zylinder tatsächlich rollt ohne zu rutschen?
Hinweis: Wenn Sie Teil (a) nicht bearbeiten, gehen Sie in Teil (b) davon aus, dass die Translationsbeschleunigung des Zylinders $0,412\frac{m}{s^2}$ beträgt (dies ist nich der wahre Wert).

Lösung:

(a) Führt man die in der Abbildung dargestellten Koordinatoren und die entsprechenden Vorzeichenkonventionen ein, dann hat man die folgende Bewegungsgleichung für die Translation des Schwerpunktes

$$m\ddot{x} = F$$

wobei F die (zunächst unbekannte) Kontaktkraft der Unterlage auf den Zylinder ist. Die Bewegungsgleichung für die Rotation des Zylinders ist

$$I\dot{\omega} = -rF$$

denn nach den gewählten Konventionen führt ein positives F zu einer Drehung im Gegenuhrzeigersinn, also auf $\dot{\omega} < 0$. Drittens hat man den Zusammenhang zwischen φ und x aufgrund der Rollbedingung und der Bewegung der Unterlage:

$$x = r\varphi + \frac{1}{2}at^2$$

Zweimal abgeleitet ergibt dies

$$\ddot{x} = r\dot{\omega} + a$$

Setzt man hier die beiden Bewegungsgleichungen ein, dann erhält man

$$\frac{F}{m} = r\left(-\frac{rF}{I}\right) + a$$

und kann das nach F auflösen:

$$F = \frac{ma}{1 + \frac{mr^2}{I}}$$

Daraus folgt die Translationsbeschleunigung

$$\ddot{x} = \frac{a}{1 + \frac{mr^2}{I}} = 0,375 \frac{m}{s^2}$$

und die Winkelbeschleunigung

$$\dot{\omega} = \frac{1}{r}(\ddot{x} - a) = -\frac{mra}{I + mr^2} = -12,5 \frac{1}{s^2}$$

(b) Der Haftreibungskoeffizient muss so groß sein, dass die Reibung die notwendige Kontaktkraft F liefern kann, die diem Zylinder die Translationsbeschleunigung $\ddot{x}$ erteilt. Also:

$$\mu_H G > m\ddot{x}$$

bzw.

$$\mu_H > \frac{\ddot{x}}{g} = \frac{0,375 \frac{m}{s^2}}{9,81 \frac{m}{s^2}} = 0,038$$

Alternativ:

$$\mu_H > \frac{\ddot{x}}{g} = \frac{0,412 \frac{m}{s^2}}{9,81 \frac{m}{s^2}} = 0,042$$

3. Bruchstücke

(a) Betrachten Sie ein ruhendes Teilchen der Masse m, das in zwei Bruchstücke m_1 und m_2 zerfällt. Beim Zerfall wird die Energie Q frei, die vollständig in kinetische Energie der beiden Bruchstücke umgesetzt wird. Berechnen Sie die Geschwindigkeiten der Bruchstücke.

(b) Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m und der Geschwindigkeit v, das in zwei Bruchstücke m_1 und m_2 zerfällt, die sich entlang derselben Geraden wie das ursprüngliche Teilen bewegen sollen. Beim Zerfall wird die Energie Q frei, die vollständig in kinetische Energie der beiden Bruchstücke umgesetzt wird. Berechnen Sie die Geschwindigkeiten der Bruchstücke.
Hinweis: Alle Geschwindigkeiten seien so klein, dass sie nichtrelativistisch rechnen können.

Lösung:

Wir wenden Energie- und Impulserhaltung an

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$$

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = 2Q$$

Mit der ersten Gleichung kann man v_2 aus der zweiten eliminieren und erhält

$$m_1 v_1^2 + \frac{m_1^2}{m_2} v_1^2 = 2Q$$

also

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\frac{2Q}{m_1}}{1+\frac{m_1}{m_2}}} + v$$

und

$$v_2 = -\sqrt{\frac{2\frac{2Q}{m_2}}{1+\frac{m_2}{m_1}}} + v$$

4. Fallende Kugeln

Zwei Kugeln werden gleichzeitig mit einem sehr kleinen vertikalen Abstand aus der Höhe h über der Erde fallen gelassen. Die obere Kugel habe die Masse m und die untere die Masse M mit $m < M$. Die Radien der Kugeln seien klein im Vergleich zu h und können vernachlässigt werden. Der Geschwindigkeitsbetrag der unteren Kugel unmittelbar bevor sie den Boden erreicht sei u. Nehmen Sie an, alle Stöße seien elastisch und vernachlässigen Sie in den Rechnungen den vertikalen Abstand der Kugeln.

(a) Skizzieren Sie die Situation, wie sie im Laborsystem gesehen unmittelbar nach dem Auftreffen der unteren Kugel auf dem Boden, aber vor dem Zusammenstoß der unteren mit der oberen Kugel gesehen wird.

(b) Skizzieren Sie die gleiche Situation im Schwerpunktsystem.

(c) Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit der oberen Kugel im Laborsystem unmittelbar nach dem Zusammenstoß der beiden Kugeln gegeben ist durch

$$v = \frac{3M - m}{M + m} u \tag{1}$$

(d) Bestimmen Sie die maximale Höhe, die die obere Kugel erreicht.

Lösung:

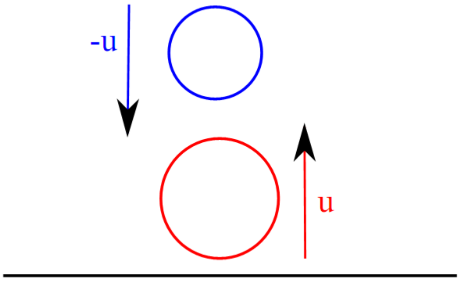

Abbildung 3: Skizze zu A4a

(a) Die Geschwindigkeiten wurden nach oben als positiv definiert. Da der vertikale Abstand der Kugeln zu vernachlässigen ist, hat die obere Kugel unmittelbar vor dem Zusammenstoß mit der unteren die Geschwindigkeit $-u$

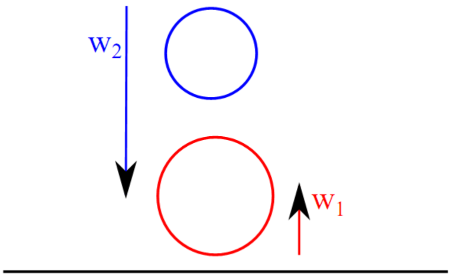

Abbildung 4: Skizze zu A4b

(b) Im Schwerpunktsystem haben die Kugeln nun unterschiedlich große Geschwindigkeiten, wobei die untere schwere Kugel die kleinere Geschwindigkeit besitzt.

(c) Es is einfacher, im Schwerpunktsystem zu rechnen, da hier die Geschwindigkeiten beim elastischen Stoß einfach ihr Vorzeichen wechseln. Unmittelbar vor dem Zusammenstoß der beiden Kugeln gilt die für die Geschwindigkeiten im Schwerpunktssystem durch Galilei-Transformation:

$$\omega_1 = u - V \text{ und } \omega_2 = -u - V$$

Für die Schwerpunktsgeschwindigkeit gilt

$$V = \frac{Mu - mu}{M + m} = \frac{M - m}{M + m} u$$

Unmittelbar nach dem Zusammenstoß gilt für die Geschwindigkeit der oberen Ku-

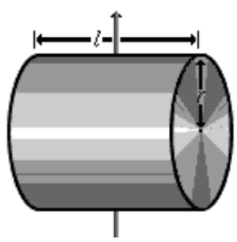

Abbildung 5: Zylinder zu 5a

gel im Schwerpunktsystem

$$\omega_2' = -\omega_2 = u + V$$

und zurückgerechnet ins Laborsystem

$$v_2' = \omega_2' + V = u + 2V = u\left(1 + 2\frac{M-m}{M+m}\right) = \frac{3M-m}{M+m}u$$

(d) An ihrer maximalen Höhe hat die obere Kugel eine reine potentielle Energie von mgh_{max}. Unmittelbar nach dem Zusammenstoß (näherungsweise bei $h = 0$) hat die obere Kugel eine reine kinetische Energie von $\frac{1}{2}mv_2^2$. Wegen Energieerhaltung muss gelten

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = mgh_{max}$$

$$h_{max} = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{u^2}{2g}\left(\frac{3M-m}{M+m}\right)^2$$

Aus der ursprünglichen Abwurfhöhe h folgt abermals per Energieerhaltung, dass $u^2 = 2gh$, also

$$h_{max} = \left(\frac{3M-m}{m+M}\right)^2 h$$

5. Trägheitsmomente

Berechnen Sie das Trägheitsmoment von

(a) Einen homogenen Vollzylinder (Masse m, Radius R, Länge l) für Rotation um eine Achse durch den Schwerpunkt senkrecht zu Symmetrieachse.
Hinweis: $\int_0^{2\pi} d\phi \cos^2(\phi) = \pi$)

(b) Einer Kugelhantel, aufgebaut aus einem Zylinder wie oben und zwei Kugeln der Radien r und Massen M am Ende für die Drehung um eine Achse durch den Schwerpunkt und senkrecht zur Symmetrieachse.

(c) Ein Diabolo der Masse m besteht aus zwei (dünnen) Halbkugelschalen der Radien R, die an ihren Scheitelpunkten verbunden sind. Wie ist das Träg-

heitsmoment für die Drehung um die Symmetrieachse?
Hinweis: $\int_0^\pi d\Theta \sin^3(\Theta) = \frac{4}{3}$

Lösung:

(a) Wir parametrisieren den Zylinder in Zylinderkoordinaten. Dann ist $dV = rdrd\phi dz$. Wir legen den Schwerpunkt des Zylinders in den Ursprung. Der Abstand eines Punktes im Zylinder zur Achse ist dann:

$$d = \sqrt{z^2 + r^2cos^2(\phi)}$$

Dabei geht die z-Achse entlang der Längsachse des Zylinders (also entlang der Achse, die durch den Mittelpunkt der kreisförmigen Deckelflächen des Zylinders geht). r ist der Abstand von dieser Längsachse, der maximal den Radius R des Zylinders annehmen kann. Der Winkel ϕ ist der, den wir ebenso wie r von den uns bekannten Polar- bzw. Zylinderkoordinaten kennen, er wird entlang des kreisförmigen Querschnitts abgetragen (der Kreis, den wir bislang zur Definition der Polarkoordinaten benutzt haben und der bisher in der $x-y-$Ebene lag, wird also in dieser Definition um 90^{circ} gekippt, der Winkel wird also entlang dem Deckflächenkreis des Zylinders abgetragen).

$$I = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R drr\rho(z^2 + r^2cos^2(\phi))$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R drr\rho \left(\frac{1}{3}\left(\frac{l^3}{8} - \frac{-l^3}{8}\right)\right) + lr^2cos^2(\phi)$$

$$= \frac{l^3}{12}\rho\frac{1}{2}R^2 2\pi + \frac{1}{4}R^4 l\rho \int_0^{2\pi} d\phi cos^2(\phi)$$

Das Integral von $\cos^2(\phi)$ über die gesamte Periode (also über den gesamten Kreis) ist nach dem Hinweis gleich π.

$$I = \frac{l^3}{12}\pi R^2\rho + l\rho\frac{1}{4}R^4\pi$$

Mit der Massendichte $\rho = \frac{m}{l\pi R2}$ eingesetzt ergibt sich

$$I = \frac{ml^2}{12} + \frac{mR^2}{4}$$

(b) Das gesamte Trägheitsmoment kann man aus einzelnen Trägheitsmomenten

- aus dem des Zylinders und aus dem der Kugeln - zusammensetzen. Das Trägheitsmoment des Zylinders lautet (hier ohne Herleitung):

$$I_{Zyl} = \frac{ml^2}{12} + \frac{mR^2}{4}$$

Die Kugeln erhalten gemäß dem Satz von Steiner zusätzlich zum angegebenen Trägheitsmoment einen Summanden wie Md^2, wobei d die Entfernung des Kugelschwerpunktes von der Drehachse ist: $I_{Kugel} = \frac{2}{5}Mr^2 + M(\frac{l}{2} + r)^2$. Zusammen ist das dann also

$$I_{ges} = I_{Zyl} + \frac{4}{5}Mr^2 + M(\frac{l^2}{2} + 2r^2 + 2lr)$$

(c) Zuerst berechnet man das Trägheitsmoment einer vollen Kugel. Man verwendet Kugelkoordinaten. In Kugelkoordinaten lautet das Volumenelement $dV = r^2 sin(\Theta)drd\Theta d\phi$ bzw. das Flächenelement $dA = R^2 sin(\Theta)d\Theta d\phi$. Die Entfernung zur $(z-)$ Achse ist $d = Rsin(\Theta)$. Eingesetzt in die Definition des Trägheitsmomentes ergibt dies

$$I = \int_0^\pi d\Theta \int_0^{2\pi} d\phi R^4 \sigma sin^3(\Theta)$$

Dabei ist $\sigma = \frac{m}{4\pi R^2}$ die Oberflächendichte. Mit dem gegebenen Integral und der Flächendichte eingesetzt ergibt dies

$$I = \frac{2}{3}mR^2$$

Man kann sich überzeugen, dass man hiert bereits fertig ist: das Diabolo kann man aus einer Kugelschale erhalten, indem man einfach eine Hälfte in $z-$Richtung verschiebt bzw. spiegelt. Eine solche Veränderung des Ortes von Masse hat aber keinen Einfluss auf das Trägheitsmoment, da man dort nur mit Abständen senkrecht zur Dreh-$(z-)$Achse rechnet.

6. Rollende Zylinder

(a) Ein homogener Zylinder von Radius r und Masse m rollte eine Rampe der Höhe h herunter. Berechnen Sie seine Geschwindigkeit am Fuß der Rampe.

Hinweis: Das Trägheitsmoment des Zylinders sei $I = \frac{mr^2}{2}$

(b) Der selbe Zylinder rollt nun auf der Ebene. Er stößt elastisch mit einem Zylinder der gleichen Masse, welcher anfangs ruhen soll. Dabei findet zwischen den Zylindern keine Reibung statt. Wie sind die Geschwindigkeiten und Ro-

Abbildung 6: Skizze zu A6

tationen unmittelbar nach dem Stoß? Die Rollbedingung ist dabei nicht mehr erfüllt!

(c) Bestimmen Sie nun allgemein das Verhältnis von Rotationsbeschleunigung zu Translationsbeschleunigung eines Zylinders, wenn eine beliebige Kraft $F(t)$ tangential am Mantel des Zylinders angreift.

(d) Nach einiger Zeit ist für beide Zylinder die Rollbedingung wieder erfüllt. Für welche Geschwindigkeit der Zylinder ist dies der Fall? Verwenden Sie dazu die Aufgabe (c).

Lösung:

(a) Die kinetische Energie eines rollenden Zylinders ist

$$E_{kin} = \frac{\frac{I}{r^2} + M}{2} v^2 = \frac{3m}{4} v^2$$

Der Zylinder verliert durch das Abrollen an der Rampe potentielle Energie $\Delta E_{pot} = mgh$, im gleichen Maße nimmt die kinetische Energie zu. Man erhält

$$v_0 = \sqrt{4mgh3m} = \sqrt{\frac{4}{3} gh}$$

(b) Man kann den Stoß wie den Stoß von zwei Punktmassen betrachten, da keine Reibung zwischen den Zylinder stattfindet. Teilchen mit gleichen Massen vertauschen beim Stoß ihre Impulse. Daher gilt:

$$v_1 = 0, \; v_2 = v_0$$

Die Drehung der Zylinder bleibt völlig unbeeinflusst:

$$\omega_1 = \omega_0 = \frac{v_0}{r}, \; \omega_2 = 0$$

Dabei ist berücksichtigt worden, dass der Körper vor dem Stoß ohne rutschen rollen soll - vor dem Stoß kann also die Rollbedingung angewandt werden.

(c) Die Drehachse zeigt in die Bildebene hinein (s. Zeichnung und Anwendung der rechten-Hand-Regel). Daher erzeugt eine Kraft, die am Auflagepunkt nach rechts zeigt, ein negatives Drehmoment

$$D = -Fr = I\dot{\omega}$$

Durch die selbe Kraft wird die folgende Schwerpunktbeschleunigung hervorgerufen

$$F = m\dot{v} \tag{2}$$

Wenn wir nun das gesuchte Verhältnis bilden, sehen wir, dass die uns unbekannte Kraft F sich praktischerweise herauskürzt:

$$\frac{\dot{v}}{\dot{w}} = -\frac{\frac{F}{m}}{\frac{Fr}{I}} = -\frac{I}{mr} = -\frac{r}{2}$$

(d) Die Reibung greift tangential am Auflagepunkt an und sorgt daher für ein Drehmoment, das wiederum zur Rollbewegung führt. Die Rollbedingung ist erfüllt für:

$$v' = \omega' r$$

Wir suchen eine Winkelgeschwindigkeit ω' und eine Geschwindigkeit v', so dass die Rollbedingung wieder erfüllt ist. Dabei müssen die Differenzen zum Anfangszustand mit der in 3. hergeleiteten Bedingung zusammenhängen:

$$(v' - v) = -\frac{r}{2}(\omega' - \omega)$$

Mit der Rollbedingung eingesetzt ergibt dies

$$(r\omega' - v) = -\frac{r}{2}(\omega' - \omega)$$

$$\frac{3}{2}r\omega' = v + \frac{r}{2}\omega$$

$$\omega' = \frac{2v}{3r} + \frac{\omega}{3}$$

Es ist zu erwarten, dass der erste Zylinder sich solange beschleunigt und dabei seine Rotation verlangsamt, bis die Rollbedingung wieder erfüllt ist. Der zweite Zylinder hingegen muss seine Geschwindigkeit verringern und sich dabei in Rotation versetzen. Mit obiger Gleichung und den Anfangsbedingungen ist

$$\omega_1' = \frac{\omega_0}{3},\ \omega_2' = \frac{2}{3r}v_0 = \frac{2}{3}\omega_0$$

Die zugehörigen Geschwindigkeiten sind

$$v_1' = \frac{v_0}{3},\ v_2' = \frac{2v_0}{3}$$

Zusammen mit den gleichen Massen und Trägheitsmomenten kann man hier die Impuls- und Drehimpulserhaltung beobachten.

7. total inelastischer Stoss

Beim Stoß eines Teilchens mit der Masse m_1 und der Geschwindigkeit v_1 gegen ein ruhendes Teilchen Masse m_2 kann nicht die gesamte kinetische Energie in innere Energie umgewandelt werden.

(a) Welcher Bruchteil der kinetischen Energie wird bei total inelastischer Kollision umgewandelt?

(b) Zeigen Sie, dass dieser Bruchteil der kinetischen Energie gleich der anfänglichen kinetischen Energie im Schwerpunktsystem ist.

Lösung:

Es kann nicht die gesamte kinetische Energie in innere Energie umgewandelt werden, da dafür das System der beiden Massenpunkte nach dem Stoß ruhen müsste, und das ist nicht mit der Impulserhaltung verträglich.

(a) Es gilt Impulserhaltung

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1$$

Maximale Umwandlung in innere Energie findet statt bei total inelastischer Kollision, d.h. wenn

$$v_1' = v_2'$$

Das sind zwei Gleichungen für zwei gesuchte Größen v_1' und v_2' mit der Lösung

$$v_1' = v_2' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Die erzeugte innere Energie Q erhält man dadurch, dass man die kinetische Energie vorher mit der kinetischen Energie nachher vergleicht, also $E_{innere} = E_{kin,vorher} - E_{kin,nachher}$

$$Q = \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}v_1\right)^2$$
$$= \frac{1}{2}m_1v_1^2\left(1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}m_1v_1^2\frac{m_2}{m_1+m_2} = qT$$

wobei wir mit q den Bruchteil bezeichnen:

$$q = \frac{m_2}{m_1+m_2}$$

Dies kann man sich plausibel machen: Für $m_2 = \infty$ ist $q = 1$ und für $m_2 = 0$ ist $q = 0$

(b) Die Geschwindigkeit v_s des Schwerpunktsystems ist gegeben durch die Bedingung, dass der Gesamtimpuls verschwindet:

$$m_1(v_1 - v_S) + m_2(v_2 - v_S) \stackrel{!}{=} 0$$

Mit $v_2 = 0$ ergibt sich hieraus

$$v_S = \frac{m_1}{m_1+m_2}v_1$$

Die anfängliche kinetische Energie im Schwerpunktsystem ist

$$T_S = \frac{1}{2}m_1(v_1 - v_S)^2 + \frac{1}{2}m_2v_S^2$$

Setzt man hier v_S ein, dann erhält man

$$T_S = \frac{1}{2}m_1v_1^2\left(1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2v_1^2\frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}$$
$$= \frac{1}{2}m_1v_1^2\left(\frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2} + \frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}m_1v_1^2\frac{m_2}{m_1+m_2}$$

8. Student und Prof auf Wagen

Ein Professor und ein Student stehen sich im Hörsaal auf Wagen der Massen M_P und M_S gegenüber. Ihr Abstand ist zunächst d_0. Der Student hält ein Ende eines Seils fest, der Professor zieht am anderen Ende kräftig an.

Die Wagen prallen im Abstand d vom Startpunkt des Professors aufeinander. Berechnen Sie die Masse m_P des Professors, wenn die Masse des Studenten $m_S = 75$ kg, der Anfangsabstand $d_0 = 30$ m, $d = 10$ m, $M_P = 100$ kg und $M_S = 25$ kg beträgt. Vernachlässigen Sie die Ausdehnung der Wagen und die Reibung.

Lösung:

Da auf das betrachtete System nur innere Kräfte wirken, treffen sich die beiden Waagen im Schwerpunkt des Systems. Dessen konstante Lage X ist gegeben durch

$$m_1x_1 + m_2x_2 = (m_1 + m_2)X$$

mit $m_1 = m_p + M_P$, $m_2 = m_S + M_S$. Legen wir den Nullpunkt der $x-$Achse in den Startpunkt des Professors, dann gilt also $x_1 = 0$, $x_2 = d_0, X = d$. Damit können wir die Schwerpunktsgleichung nach m_1 auflösen:

$$m_1 = \frac{m_2(d_0 - d)}{d} = \frac{(75kg + 25kg)(30m - 10m)}{10m} = 200kg$$

Also ist die Masse des Professors $m_P = m_1 - M_P = 100kg$.

9. Karussell

Zwei Kinder (je $m = 40$ kg) sitzen auf einem Karussell, das aus einer Scheibe mit Radius $r = 2m$ und einer Masse $M = 1000$ kg besteht, die um eine Achse in der Mitte drehbar ist. Die Kinder sitzen sich diametral gegenüber am Rand der Scheibe.

(a) Berechnen Sie das Gesamtträgheitsmoment der Scheibe mit den darauf sitzenden Kindern. Betrachten Sie die Kinder dafür als Massenpunkt am Rand der Scheibe.
Hinweis: Trägheitsmoment der Scheibe $\frac{1}{2}Mr^2$

(b) Ein drittes Kind will das Karussell nun am Rand anschieben. Es kann eine maximale Kraft $F = 100$ N aufbringen. Wie lange muss es mit dieser konstanten Kraft schieben, um das Karussell auf eine zehntel Umdrehung pro Sekunde zu beschleunigen?

(c) Die Kinder auf dem Karussell haben einen Haftreibungskoeffizienten von $\mu = 0.5$. Bei welcher Drehfrequenz (Umdrehung pro Sekunde) fallen sie herunter?

Lösung:

(a) Das gesamte Trägheitsmoment setzt sich zusammen aus dem Trägheitsmoment des Karussels und dem Trägheitsmomet der beiden Kinder. Diese werden als punktförmig angesehen. Das Trägheitsmoment einer Punktmasse lautet mr^2.

$$I_{ges} = \frac{1}{2}Mr^2 + 2mr^2 = 2320kgm^2$$

(b) Zunächst können wir das Drehmoment bestimmen, das das dritte Kind aufbringt.

$$M = F \cdot r = 200J$$

Dies kann in Relation mit der Winkelgeschwindigkeit gesetzt werden.

$$M = I_{ges} \cdot \dot{\omega}$$

Und über $\dot{\omega} = \frac{\omega}{t}$ folgt schließlich:

$$t = \frac{\omega}{\dot{\omega}} = \frac{I_{ges}\omega}{F \cdot r} = 7,29s \tag{3}$$

(c) Sobald die Zentripetalkraft die Haftreibungskraft überschreitet, fallen die Kinder herunter. Wir berechnen nun den Grenzfall, wo sich beide Kräfte gegenseitig aufheben ($F_Z = F_R$).

$$\mu mg = \omega^2 rm \tag{4}$$

Hieraus folgt die Grenzgeschwindigkeit:

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu g}{r}} = 1,57Hz \tag{5}$$

Also ab einer Drehfrequenz von $0,25$ Umdrehungen pro Sekunde fliegen die Kinter herunter.