Thema des heutigen Tages sind zuerst logische Formulierungen, dann geordnete Mengen und Abbildungen, Gruppen und Körper und zum Schluss Beweistechniken.

1 Logik

1.1 Einfache Aussagenlogik

Logik findet im wesentlichen so statt, wie man es vielleicht aus der Informatik mit „Booleans“ kennt - eine Aussage kann wahr oder falsch sein, ein drittes ist nicht möglich. Mit geeigneten Verknüpfungen lassen sich mehrere Aussagen verbinden und auf ihren Wahrheitsgehalt überprüfen, was uns schlussendlich ermöglicht, Beweise nicht nur direkt zu führen.

A	¬ A
w	f
f	w

(a) einfache Logik: Negation

A	B	A ∧ B	A ∨ B	A ⇒ B	A ⇔ B
f	f	f	f	w	w
f	w	f	w	w	f
w	f	f	w	f	f
w	w	w	w	w	w

(b) komplexere Aussagen: und, oder, Implikation, Äquivalenz

Abbildung 1: Logische Tabellen

Eine Aussage wird negiert, indem die einzelnen Aussagenteile negiert werden. Operationen wie „und“ oder „oder“ sind nicht betroffen. Die Äquivalenz bedeutet nichts anderes als Implikation in beide Richtungen.

Folgerung 1.1 *Äquivalenz zweier Aussagen*

Um die Äquivalenz zweier logischer Formulierungen zu überprüfen, stellt man eine Tabelle wie oben (Abb. 1) auf und überprüft die einander entsprechenden Einträge auf Übereinstimmung.

1.2 Mengen

Bevor wir uns Quantoren zuwenden, müssen wir zuerst Mengen definieren. Sonst machen Quantoren wenig Sinn, da diese immer auf einen Satz von Objekten wirken.

Definition 1.2 *Menge*

Eine **Menge** ist ein zusammengehöriger Satz von beliebigen Objekten. Wir schreiben eine Menge so: {Objekte 1, Objekt 2,...}

Wir können uns eine Menge als große Kiste vorstellen, in die wir alles mögliche hineinwerfen können - selbst neue Kisten mit wieder Objekten darin. Werfen wir mehrmals das gleiche Objekt hinein, so ist es Konvention, dass wir es trotzdem nur einmal aufschreiben. Werfen wir nichts in die Kiste hinein, sprechen wir von der „leeren Menge“ $\phi = \{\}$. Die leere Menge ist also nicht Nichts, sondern in unserem Bild eine leere Kiste. Natürlich dürfen wir unsere ursprüngliche Kiste auch eine leere Kiste hineinlegen. Damit ist die Menge $\{\phi\}$ nicht leer, sondern enthält ein Element.

Beachte also: $\{2, 2\}$ ist einelementig, $\{2, \{2\}\}$ ist zweielementig.

Wir können auf einzelne Objekte in der Menge „zugreifen“, indem wir „$\in$“ oder „$\notin$“ verwenden. Diese Operationen überprüfen, ob ein Element in einer Menge enthalten oder nicht enthalten ist. Wir schauen also in unsere Kiste, ob das Objekt in dieser ist.

Beispiel 1.3

- $2 \in \{2, \{2\}\}$ und $\{2\} \in \{2, \{2\}\}$ sind wahr
- $2 \in \{1, \{2\}\}$ ist falsch, also ist $2 \notin \{1, \{2\}\}$ wahr

Möchten wir nicht überprüfen, ob ein Objekt in einer Menge enthalten ist, sondern gleich ein ganzer Satz von Objekten, so verwenden wir die Teilmenge „$\subset$“ oder Obermenge „$\supset$“. Das heißt in unserem Kistenbild: Wir nehmen eine zweite Kiste, füllen wieder Objekte hinein. Vergleichen wir dann die beiden Kisten miteinander und stellen fest, dass die Objekte, die in Kiste 2 liegen, auch in Kiste 1 alle drin sind, so sagen wir, dass Kiste zwei also eine Teilmenge von Kiste 1 ist. (Für Obermenge sind die Rollen von Kiste 1 und 2 im letzten Satz vertauscht).

Beispiel 1.4

- $2 \subset \{2, \{2\}\}$ ist nicht definiert
- $\{2\} \subset \{2, \{2\}\}$ und $\{\{2\}\} \subset \{2, \{2\}\}$ sind wahr
- $\{2\} \subset \{1, \{2\}\}$ ist falsch

Möchten wir hier eine Aussage negieren, so werden hier nur die Operationen negiert. (Achtung: Anders als bei logischen Operationen vorher!)
Beachte: Die Mengen ϕ und M sind immer Teilmenge von M, selbst wenn M selbst die leere Menge ist, jedoch muss nicht gelten, dass sie Element sind, also: $\phi \subset M$ und $M \subset M$, aber im Allgemeinen **nicht**: $\phi \in M$ und $M \in M$.
Wir können Mengen nicht nur durch Aufzählung der einzelnen Element darstellen, sondern auch mit Hilfe von Bedingungen festlegen, welche Elemente wir gerne in der Menge hätten. Dies ist bei großen Mengen durchaus sinnvoll, so wäre es schließlich ein Ding der Unmöglichkeit, z.B. alle geraden Zahlen aufzuschreiben. Dies würden wir z.B. so darstellen: $M = \{x | x, y \in \mathbb{N} : x = 2y\}$

1.3 Quantoren

Quantoren sind dazu da, logische Aussagen von der Textform zu entbinden, wann immer wir „für alle“ oder „es gibt“ sagen müssten. Quantoren erleichtern uns insbesondere dann das Leben, wenn wir die Negation einer Aussage bilden müssen, die in Textform nicht mehr so ganz eindeutig zu finden wäre. (siehe Beispiel unten)

Definition 1.5 *Allquantor und Existenzquantor*

Allquantor: $\forall x \in M : A(x)$ bedeutet: Für alle Elemente x, die in der Menge M enthalten sind, gilt die Aussage A (bzw. ist A wahr).
Existenszquantor: $\exists x \in M : A(x)$ bedeutet: Es gibt mindesens ein Element x in der Menge M, für das die Aussage A gilt (bzw. wahr ist).

Aussagen mit Quantoren werden verneint, indem nur die Quantoren durch den jeweils anderen ersetzt werden. Damit ist die jeweils zum Quantor gehörende Bedingung bereits erledigt, Elementzeichen werden nicht weiter mit der Negation behandelt. Erst nach den Doppelpunkten müssen wieder die Regeln aus den vorigen Abschnitten beachtet werden.
Folgen zwei gleiche Quantoren mit Bedingung aufeinander, so werden sie oft zu einem zusammengefasst: $\forall x \in M \forall y \in N : A(x, y)$ wird zu $\forall x \in M, y \in N : A(x, y)$

Beachte: Quantoren stehen immer links, also vor der Aussage. Kommen verschiedene Quantoren in einer Aussage vor, so ist die Reihenfolge entscheidend.

Beispiel 1.6 *Apfelbäume*

Sei A die Menge aller Äpfel und B die Menge aller Bäume.

- Sinnvolle ursprüngliche Aussage:
  $\forall a \in A \exists b \in B : a$ ist auf b gewachsen
- Vertauschung der Bedingungen ergibt offensichtlich einen anderen Sinn:
  $\exists b \in B \forall a \in A : a$ ist auf b gewachsen
- Negation der ursprünglichen Aussage:
  $\neg(\forall a \in A) \neg(\exists b \in B) : \neg(a$ ist auf b gewachsen)
  also: $\exists a \in A \forall b \in B : a$ ist nicht auf b gewachsen

Die zweite Aussage ist dann nicht sinnvoll, denn nicht alle Äpfel sind auf ein- und demselben Baum gewachsen. Der letzte Teil des Beispiels hilft uns dabei, die oben angesprochene eindeutige Verneinung einer Aussage zu finden. Die ursprüngliche Aussage: „Alle Äpfel sind auf irgendeinem Baum gewachsen.“ negieren wir also nicht durch „Kein Apfel ist auf einem Baum gewachsen.“, „Alle Äpfel sind auf keinem Baum gewachsen.“ oder „Kein Apfel ist auf keinem Baum gewachsen.“, sondern durch „Es gibt mindestens einen Apfel, auf nicht auf einem Baum gewachsen ist.“.
Dies ist offensichtlich die einzig mathematisch richtige Verneinung, die wir finden, auch wenn sie nicht wahr ist, sofern wir die 1. Aussage als wahr voraussetzen (sprich wir betrachten keine Erdäpfel, Pferdeäpfel etc.).

1.4 Mengenoperationen

Zunächst müssen wir uns überlegen, wann überhaupt zwei Mengen gleich sind. Die intuitive Definition ist, dass wir uns anschauen, was in den Mengen enthalten ist und dann schauen, ob es einen Unterschied zwischen beiden Mengen gibt. Tatsächlich ist das auch der mathematische Begriff, wenn auch etwas anders formuliert:

Definition 1.7 *Gleicheit von Mengen*

Zwei Mengen sind gleich, wenn sie sich gegenseitig enthalten, also $A \subset B$ und $A \supset B$ (bzw. $B \subset A$)

Dann können wir uns Operationen definieren.

Definition 1.8 *Verschiedene Operationen*

Sei X eine Menge und A, A_i $B \subset X$, $i = 1, 2, ..., n$. Dann definieren wir:

- **Vereinigung**: $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$
  oder für n Mengen: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x | x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \cdots \vee x \in A_n\}$
- **Schnitt**: $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
  oder für n Mengen: $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x | x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \cdots \wedge x \in A_n\}$
- **Differenz**: $A \backslash B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$
- **Komplement**: $A^c = \{x | x \in X \wedge x \notin A\}$
- **Karthesisches Produkt**: $A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$
  (erweiterbar auf bel. viele Dimensionen)
- **Potenzmenge**: $\mathcal{P}(A) = \{M | M \subset A\}$

Die ersten 4 Operationen lassen sich sehr anschaulich durch Venn-Diagramme darstellen, d.h. man male amöbenartige Gebilde, die die Mengen symbolisieren, in geeigneter Relation zueinander.

1.5 Geordnete Mengen

Definition 1.9 *Relationen, geordnete Menge*

Es gibt Mengen, die sich nicht ordnen lassen, und Mengen, die man ordnen kann. Die Ordnung einer **geordneten Menge** M wird durch sog. **Relationen** bestimmt, wir schreiben hierfür z.B. $x < y$ oder $y > z$ $(x, y, z \in M)$. Eine geordnete Menge wird so geschrieben: $(M, >)$

Beispiel 1.10

Nehmen wir als Beispiel eine beliebige, nicht leere Teilmenge M der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Hierfür finden wir immer für jedes $x \in M$ ein weiteres Element in M das eindeutig kleiner oder größer ist, aber nie eines, das genau gleich groß ist außer sich selbst. Also haben wir in natürlicher Weise eine Ordnung gefunden.
Im Gegensatz dazu nehmen wir eine geeignete Teilmenge N aus $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, also gerade ganzzahlige Gitterpunkte der karthesischen Ebene. Hierfür finden wir nur eine Quasiordnung. Wir können zwar den (euklidischen) Abstand zu (0,0) als Ordnungskriterium hernehmen, jedoch wissen wir dann nicht, wie wir Punkte gleichen Abstandes (z.B. (0,1) und (1,0)) anordnen sollen.

Definition 1.11 *Beschränktheit, Supremum, Infimum, Maximum, Minimum*

Sei M eine geordnete Menge. Falls es für alle $x \in M$ ein $s < \infty$ gibt, für das $x \leq s$ gilt, so ist M **nach oben beschränkt**, s heißt dann **obere Schranke**. Ist s weiterhin die kleinste obere Schranke, so heißt s **Supremum**. Falls $s \in M$, so heißt s **Maximum**. Analog definiert man sich **(kleinste) untere Schranke, Infimum, Minimum**. Ist M nach oben und unten beschränkt, so sagen wir einfach: M ist **beschränkt**.
Man sagt, die Menge M hat die Supremumseigenschaft, wenn für alle nichtleeren, nach oben beschränkten Teilmengen von M das Supremum in M existiert.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass Supremum, Infimum, Maximum, Minimum eindeutig sind, falls sie existieren. $\mathbb{N}$ hat die **Supremumseigenschaft**, $\mathbb{Q}$ hat sie nicht. Hierzu betrachte man $N = \{x | x \in M : x^2 < 2\}$; hierfür finden wir in $\mathbb{N}$ als Supremum $1 \in \mathbb{N}$, jedoch in $\mathbb{Q}$ sehen wir: Das Supremum ist $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, da wir für jede Zahl $q \in \mathbb{Q}$ eine weitere finden, die noch näher an der Schranke liegt.
$\mathbb{R}$ hingegen hat die Supremumseigenschaft, man sagt: $\mathbb{R}$ ist vollständig.

2 Abbildungen

2.1 Definition und Eigenschaften von Abbildungen

Definition 2.1 *Abbildung, Definition- und Wertebereich*

Seien M, N Mengen. Eine **Abbildung** f (oder auch Funktion genannt) ordnet jedem Element m aus M eindeutig ein Element $n = f(m)$ aus N zu. Man schreibt: $f : M \to N, m \mapsto n = f(m)$ oder kurz: $f : M \to N, n = f(m)$
M heißt **Definitionsbereich**, N heißt **Wertebereich** der Funktion.

Definition 2.2 *Bild, Urbild, Graph, Einschränkung*

Es seien die Voraussetzungen wie oben. $f(m) = n$ heißt das **Bild von** m, $f^{-1}(n) = \{x | x \in M \wedge f(x) = n \in N\}$ heißt das **Urbild**[1] **von** n. Wir nennen $f(M)$ das **Bild von f** oder **Bild von** M **unter** f und $f^{-1}(N)$ das **Urbild von** N **unter** f.
Die Menge $\mathcal{G} = \{(m, f(m)) | x \in M\}$ heißt der **Graph von** f.
Die Abbildung $f|_K : K \to N, k \mapsto f(k)$ mit $K \subset M$ heißt **Einschränkung von f auf K**.

Definition 2.3 *Injektiv, surjektiv, bijektiv, Umkehrfunktion, Menge der Abbildungen*

Es seien die Voraussetzungen wie oben. Wir nennen eine Funktion

- **injektiv**, wenn alle $m \in M$ höchstens 1 Bild $n \in N$ haben. Nicht alle Elemente aus N müssen ein Urbild haben. Also: $\forall m_1, m_2 \in M : (f(m_1) = f(m_2) \Rightarrow m_1 = m_2)$
- **surjektiv**, wenn alle $n \in N$ mindestens 1 Urbild haben. Ein $n \in N$ darf mehrere Urbilder haben. Also: $f(M) = N$
- **bijektiv**, wenn die Abbildung injektiv und surjektiv zugleich ist. Jedes $m \in M$ wird genau einem $n \in N$ zugeordnet.

Für eine bijektive Abbildung können wir die **Umkehrfunktion** $f^{-1} : N \to M, f^{-1}(n) = m$ definieren, die zu jedem Bild $f(m) = n$ das eindeutige Urbild wiedergibt.
Mit $N^M = \{f : M \to N\}$ bezeichnen wir die Menge aller Abbildungen von M nach N. Achtung: Dies ist eine Menge, deren Elemente Funktionen sind.

Beispiel 2.4 *Anwendung der Definitionen*

Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$. Dann ist

- $f(2) = 4$ das Bild von $2 \in \mathbb{R}$
- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$ das Bild von f
- $f^{-1}(4) = \{-2, 2\}$ das Urbild von $4 \in \mathbb{R}^+$ unter f
- $f^{-1}(-4) = \phi \subset \mathbb{R}$, da -4 zwar im Wertebereich von f ist, aber nicht im Bild. Daher ist das Urbild die leere Menge.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ nicht surjektiv, jedoch $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+, f(x) = x^2$ surjektiv
- Beide Beispiele aus der vorigen Zeile sind nicht injektiv - es wurde bereits gezeigt, dass das Urbild nicht eindeutig ist.
- die Einschränkung $f|_{\mathbb{R}^+} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f(x) = x^2$ bijektiv.

[1] Nicht zu Verwechseln mit der Umkehrfunktion, die dieselbe Notation hat, im Gegensatz zum Urbild eindeutig ist.

Definition 2.5 *Monotonie*

Eine Funktion $f : M \to N$ für geordnete Mengen $(M, >)$, $(N, >)$ heißt **monoton wachsend**, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: $y \geq x \Rightarrow f(y) \geq f(x)$
Gilt nur „$>$“ statt „$\geq$“, so heißt die Funktion **streng monoton wachsend**. Analog definiert man **(streng) monoton fallend**.

Bemerkung: Man kann leicht zeigen, dass eine streng monotone Funktion immer injektiv ist (siehe Übung).

Satz 2.6 *von Cantor-Schröder-Bernstein*

Existieren zwei injektive Abbildungen $f : M \to N$ und $g : N \to M$, so gibt es eine Bijektion von M nach N.

2.2 Komposition von Abbildungen

Oft lassen sich in der Mathematik Abbildungen in mehrere einfache Abbildungen zerlegen. Dies wird uns später vor allem bei der Differentiation von Funktionen nützen (Stichwort Kettenregel). Andersherum lassen sich natürlich auch beliebig komplizierte Funktionen aufbauen, in dem wir sie komponieren, also ineinander verschachteln.

Definition 2.7 *Komponierte Abbildung*

Seien $f : M \to K$ und $g : K \to N$ zwei Abbildungen. Dann bezeichnen wir mit $g \circ f(m) : M \to N, (g \circ f)(m) := g(f(m))$ die **Komposition von f und g** oder **g nach f**

Satz 2.8 *Vererbung von Eigenschaften*

Sind beide Funktionen aus der obigen Definition injektiv, surjektiv oder monoton, so erbt die komponierte Funktion die entsprechende Eigenschaft.
Bemerkung: Ist die Eigenschaft nur bei einer der Funktionen vorhanden, so kann man in einigen Fällen ein Gegenbeispiel finden (siehe Übung).

2.3 Kardinalität von Mengen

Wie wir bereits mehrfach gesehen haben, hängen die Begriffe Mengen und Funktionen sehr stark miteinander zusammen. Als letzter Punkt dieses Abschnitts wollen wir noch kurz die Kardinalität bzw. Mächtigkeit von Mengen betrachten.
Hierfür müssen wir eine Abbildung finden, die uns in irgendeiner Weise die Elemente einer Menge zählen kann, selbst wenn wir unendlich viele Elemente haben. Ebenso werden wir sehen, dass zwei Arten von unendlich gibt.

Definition 2.9 *Kardinalität*

Für die **Kardinalität** $|.|$ von Mengen gilt:

- $|M| \leq |N| \Leftrightarrow \exists f \in B^A : f$ injektiv
- $|M| = |N| \Leftrightarrow \exists f \in B^A : f$ bijektiv $\Leftrightarrow (|M| \leq |N|) \wedge (|M| \geq |N|)$
- $|M| < |N| \Leftrightarrow (|M| \leq |N|) \wedge (|M| \neq |N|)$

Gilt $|M| = |\mathbb{N}|$ so heißt M **abzählbar (unendlich)**, für $|M| > |\mathbb{N}|$ ist M **überabzählbar (unendlich)**.

Satz 2.10 $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *und* $\mathcal{P}(M)$

$\mathbb{Q}$ ist abzählbar, $\mathbb{R}$ überabzählbar.
Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ hat immer eine größere Kardinalität als die Menge M selbst.

Der Beweis für $\mathbb{Q}$ ist von der Idee recht simpel: Man trage die Gitterpunkte eines ganzzahligen karthesischen Koordinatensystems ($\mathbb{N}\times\mathbb{N}$) auf, setze die y-Koordinate als Zähler und die x-Koordinate als Nenner ein. Dann zähle man diagonal (analog für negative Zahlen). Der Beweis ist als Cantorsches Diagonalelement bekannt.
Für $\mathbb{R}$ wird ein Beweisansatz in der Übung verlangt.
Der Beweis zur Potenzmenge soll nicht gemacht werden, da die Forderung aus der Definionsmenge recht intuitiv klar sein sollte.

3 Gruppen und Körper

Diesen Abschnitt wollen wir recht kurz halten, da er in der linearen Algebra in der Regel ebenfalls behandelt wurde.
Gruppen und deren Eigenschaften spielen in der Physik eine große Rolle, daher sollte man wissen, was eine Gruppe ausmacht.

Definition 3.1 *Gruppe*

Eine Gruppe ist ein Paar aus einer Menge und einer Verknüpfung $(G, \otimes)$. Dabei gilt für die Verknüpfung: $\otimes : G \times G \to G, (g_1, g_2) \mapsto g_1 \otimes g_2 = g$.
Es muss erfüllt sein (Gruppenaxiome):

- **Assoziativität**: $\forall g_1, g_2, g_3 \in G : (g_1 \otimes g_2) \otimes g_3 = g_1 \otimes (g_2 \otimes g_3)$
- **neutrales Element**: $\exists e \in G \forall g \in G : g \otimes e = g$
- **inverses Element**: $\forall g \in G \exists g^{-1} : g \otimes g^{-1} = e$

Eine Gruppe heißt **abelsch** oder **kommutativ**, wenn $\forall g_1, g_2 \in G : g_1 \otimes g_2 = g_2 \otimes g_1$.

Satz 3.2 *Neutrales Element, inverses Element*

In einer Gruppe ist das neutrale Element eindeutig, es ist links- und rechtsneutral. Ebenso ist inverse Element eindeutig sowie rechts- und linksinvers.

Definition 3.3 *Körper*

Ein Körper ist ein Tripel aus einer Menge und zwei Verknüpfungen $(K, \oplus, \odot)$, wobei
$\oplus : K \times K \to K, (k_1, k_2) \mapsto k_1 \oplus k_2 = k$ und $\odot : K \times K \to K, (k_1, k_2) \mapsto k_1 \odot k_2 = k$.
Wir bezeichnen mit 0 das Neutrale bzgl. $\oplus$ und mit 1 das Neutrale bzgl. $\odot$. Es muss gelten:

- $(K, \oplus)$ und $(K \backslash 0, \odot)$ sind abelsche Gruppen
- **Distributivgesetz**: $(k_1 \oplus k_2) \odot k_3 = (k_1 \odot k_3) \oplus (k_2 \odot k_3)$

Beispiel 3.4

Beispiele für Gruppen sind: $(\mathbb{Z}\ , +)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}, \oplus_{mod})$.
Beispiele für Körper wären $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ bzgl. „+“ und „·“. Hingegen wäre $\mathbb{Z}$ mit diesen Verknüpfungen kein Körper.

4 Beweise

Einen Beweis zu führen ist Grundlage jeder mathematischen Ausbildung. Es gibt sehr viele Arten von Beweisen. Die wichtigsten seien hier kurz vorgestellt und erläutert, was zu tun ist. Denn je nach Fall bietet sich der ein oder andere Typ von Beweis mehr oder weniger an.

4.1 Implikationsbeweise: $A \Rightarrow B$

Es gibt zwei Möglichkeiten, eine Implikation zu zeigen: Direkt und indirekt.

- Direkt: Im Wesentlichen ist der direkte Beweis aus der Schule bekannt: Man stellt eine Behauptung der Art $A \Rightarrow B$ auf und zeigt dann, dass unter Voraussetzung A immer B gilt. *Beispiel: Ist die Quersumme einer Zahl durch 3 teilbar, so ist die Zahl selbst durch 3 teilbar.*
- Indirekt: Wir machen uns die Logik aus dem 1. Abschnitt zu nutze.
  $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$. Wir nehmen also das Gegenteil von B an und zeigen, dass dann A nie erfüllt ist. Daraus können wir schließen, dass unsere ursprüngliche Behauptung richtig gewesen sein muss. *Beispiel: Eine natürliche Zahl heißt perfekt genau dann, wenn sie gleich der Summe ihrer Teiler außer der Zahl selbst ist. Ist eine Zahl perfekt, so ist sie keine Primzahl.*

4.2 Äquivalenzbezweis $A \Leftrightarrow B$

Wende die Techniken aus dem vorigen Abschnitt für Implikation in jede der beiden Richtungen an.

4.3 Alleinstehende Aussage A

Auch hier gibt es zwei wesentliche Möglichkeiten: Umformung + Definitionen und Widerspruch.

- Umformung + Definitionen: Hier machen wir uns das axiomatische und definitorische Grundgerüst der Mathematik zu nutze. Wir wenden das, was wir uns festgelegt oder schon bewiesen haben, auf die Aussage an, um dann eine wahre Aussage zu erhalten. *Beispiel:* $(\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}, \oplus_{mod})$ *bildet eine Gruppe.*
- Widerspruch: Wir negieren unsere Aussage und erhalten dann, durch Umformung einen Widerspruch zu gemachten Voraussetzungen, die wir aus der Negierung der Aussage herleiten. *Beispiel:* $\sqrt{2}$ *ist irrational.* $\rightarrow$ *Nehme an,* $\sqrt{2}$ *sei rational.*

4.4 Vollständige Fallunterscheidung

Man behandele alle Fälle, die sich aus einer Aussage ergeben können und zeige, dass es damit alle Fälle abgedeckt sind. *Beispiel: Jede Primzahl* p *lässt sich als darstellen als* $p = 4n \pm 1$ *mit* $n \in \mathbb{N}$.

4.5 Induktionsbeweis

Typischerweise finden Induktionsbeweise dann Anwendung, wenn eine Aussage für beliebige $n \in \mathbb{N}$ bewiesen werden soll. *Beispiel:* $\sum_{k=0}^{n} (2k + 1) = (n + 1)^2$
Das vorgehen ist denkbar simpel:

- Induktionsanfang: Man zeigt zunächst, dass die Aussage für ein bestimmtes $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt. Zweckmäßig sind hierfür meistens die kleinsten zugelassenen n_0.
- Induktionsvoraussetzung: Setze dann voraus, die Aussage gelte bereits für alle n. Oft wird dieser Schritt nicht erwähnt, jedoch sollte man sich im klaren darüber sein, was vorausgesetzt wird, dass man in nächsten Schritt auch erkennt, was man verwenden darf oder was man als Ergebnis erhalten will.
- Induktionsschritt: Gehe über von n zu $n + 1$ und zeige, dass die Aussage dann immer noch gilt. Prinzipiell gibt es 2 Möglichkeiten, da meist eine Gleichheit von 2 Ausdrücken zu zeigen ist: Links oder rechts $n + 1$ einsetzen. Meist ist eine Variante leichter zu rechnen.