

FERIENKURS EXPERIMENTALPHYSIK 4

2011

Übung 4

1. Übergänge im Wasserstoffatom (**)

Ein Wasserstoffatom befindet sich im angeregten Zustand $2p$ und geht durch spontane Emission eines Photons in den Grundzustand $1s$ über.

- a) Berechnen Sie den Einsteinkoeffizienten für diesen Übergang für den Fall eines linear polarisierten Photons.

Hinweise: $\Psi_{nlm_l}(\mathbf{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm_l}(\vartheta, \varphi)$,

$$R_{10}(r) = \frac{2}{a_0^{3/2}}e^{-r/a_0}, \quad R_{21}(r) = \frac{1}{2\sqrt{6}a_0^{5/2}}re^{-r/(2a_0)},$$

$$Y_{00}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta,$$

$$\int_0^\infty dr r^n e^{-\alpha r} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}.$$

- b) Die mittlere Lebensdauer des $2p$ -Zustands beträgt $\tau = 1.6$ ns. Berechnen Sie die natürliche Breite für die Lyman- α -Linie ($2p \rightarrow 1s$) und vergleichen Sie diese mit der Doppler-Breite bei Zimmertemperatur.
- c) Vergleichen Sie die sich aus b) ergebenden Breiten der Lyman- α -Linie ($2p \rightarrow 1s$) mit der Hyperfeinstrukturaufspaltung (HFS) des Wasserstoffgrundzustandes, die durch die Wellenlänge $\lambda = 21.1$ cm zwischen den beiden F -Zuständen charakterisiert ist. Welche Temperatur muss erreicht werden, damit die HFS von einem idealen Spektrometer aufgelöst werden kann?
Hinweis: Vernachlässigen Sie hierbei die Hyperfeinstruktur der $2p$ Energieniveaus
- d) Wie groß sind Übergangswahrscheinlichkeit und natürliche Linienbreite des Übergangs $3s \rightarrow 2p$ im Wasserstoffatom, wenn die Lebensdauer der Zustände $\tau(3s) = 23$ ns und $\tau(2p) = 2.1$ μ s betragen?

2. Einsteinium und exotische Atome (**)

- a) Berechnen Sie für ein fast vollständig ionisiertes Einsteinium-Ion (${}^{254}_{99}\text{Es}^{98+}$) den Bahnradius und die Gesamtenergie im Grundzustand mit verschiedenen gebundenen Teilchen in der Hülle:
- Elektron
 - Myon ($m_\mu \approx 207m_e$)
 - Anti-Proton

- b) Berechnen Sie für alle drei Fälle die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im $1s$ -Zustand innerhalb des Kernvolumens ($R_K \approx 1.21 \text{ fm} \cdot A^{1/3}$).

Hinweise: $R_{10}(r) = \sqrt{\frac{\alpha^3}{2}} e^{-\frac{\alpha r}{2}}$ mit $\alpha = 2Z/r_B$ (Bahnradius r_B).

$$\int_0^R dr r^2 e^{-\alpha r} = -e^{-\alpha R} \left(\frac{R^2}{\alpha} + \frac{2R}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3} \right) + \frac{2}{\alpha^3}.$$

3. Schwingungs-Rotations-Übergänge von HCl (**)

Wir betrachten ein zweiatomiges Molekül und lassen sowohl Schwingung als auch Rotation zu. Die Energie der Schwingungs-Rotationszustände beträgt dann

$$E = E_{\text{vib}} + E_{\text{rot}} = \hbar\omega \left(\nu + \frac{1}{2} \right) + hcBj(j+1) \text{ mit } \nu = 0, 1, \dots \text{ und } j = 1, 2, \dots$$

Die Schwingungsenergie ist dabei um ein Vielfaches größer als die Rotationsenergie. Im Energiespektrum gehört deshalb zu jedem Schwingungszustand eine Gruppe von Rotationszuständen.

- a) Skizzieren Sie das Energieniveauschema für $\nu = 1, 2$ und $j = 0, 1, 2, 3$ und zeichnen Sie die Absorptionsübergänge zwischen den Schwingungs-Rotations-Zuständen ein. Die Auswahlregeln für diese Übergänge sind

$$\begin{aligned} \Delta\nu &= \pm 1, \\ \Delta j &= \pm 1. \end{aligned}$$

- b) Abb. 1 zeigt das Infrarottransmissionsspektrum von Salzsäuredampf (HCl). Wie man erkennt zerfällt es in zwei Teile, einen sogenannten P-Zweig und einen R-Zweig. Ordnen Sie die Peaks im Transmissionsspektrum den Übergängen in ihrem Energieniveauschema gemäß der angegebenen Nomenklatur zu (R(0), R(1),..., P(1), P(2),...). Was charakterisiert P-Übergänge/R-Übergänge? Warum ergibt sich im Spektrum eine Lücke?

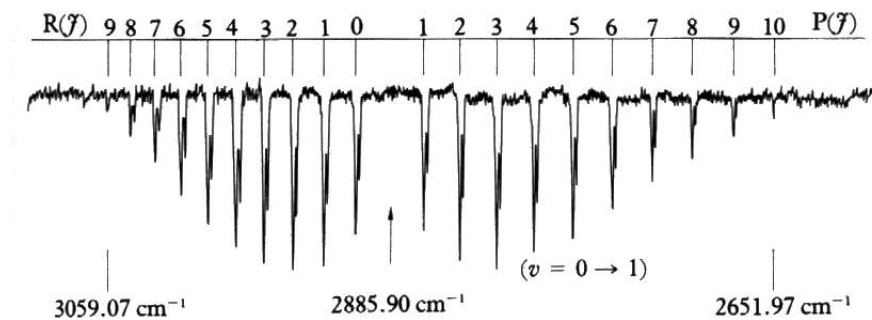


Abb. 1: Infrarottransmissionsspektrum von HCl.

Welchem Übergang würde das entsprechen? Wie groß ist demnach die Energie des ersten angeregten Vibrationszustandes?

- c) Berechnen Sie den mittleren Kernabstand R des HCl-Moleküls.
Hinweis: $m_{\text{Cl}} = 5.89 \cdot 10^{-26}$ kg, $m_{\text{H}} = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg
- d) Bei genauer Betrachtung fällt auf, dass die Absorptions-Peaks eine Substruktur (Doppelpack) haben. Wie erklären Sie diese Tatsache?

4. Moleküle im interstellaren Medium (**)

In der Radio- und Infrarotastronomie beobachtet man u.a. auch Moleküllinien im interstellaren Medium. Aus diesen Beobachtungen können Rückschlüsse auf die galaktische Verteilung und Häufigkeit der Moleküle sowie auf Sternentstehungsgebiete und -mechanismen gezogen werden.

- a) Kohlenmonoxid $^{12}\text{C}^{16}\text{O}$ emittiert beim Übergang vom ersten angeregten Rotationsniveau ($J = 1$) zum Grundzustand ($J = 0$) eine Linie der Wellenlänge $\lambda_0 = 2.6$ mm. Berechnen Sie die dazu gehörige Energie und den Abstand der beiden Atome im Molekül.
- b) Berechnen Sie die Energie und Frequenz des gleichen Übergangs auch für das Molekül $^{13}\text{C}^{16}\text{O}$ sowie die relative Frequenzverschiebung.
Hinweis: Nehmen Sie den gleichen Abstand R wie bei $^{12}\text{C}^{16}\text{O}$.