

# FERIENKURS EXPERIMENTALPHYSIK 4

## 2011

### Übung 2

#### 1. Wasserstoffatom

Die Wellenfunktionen für ein Elektron im Zustand 1s und 2s im Coulombpotential eines Kerns mit Kernladungszahl  $Z$  sind gegeben durch:

$$\Psi(r, \vartheta, \varphi)_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} e^{-\frac{Zr}{a_0}} \quad (1)$$

$$\Psi(r, \vartheta, \varphi)_{200} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \left( 2 - \frac{Zr}{a_0} \right) e^{-\frac{Zr}{2a_0}} \quad (2)$$

wobei die Konstante  $a_0$  durch:

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{\mu e^2} \quad (3)$$

definiert ist. Das  $\mu$  im Nenner steht wiederum für die reduzierte Masse von Elektron und Atomkern.

- Berechnen Sie den Erwartungswert  $\langle r \rangle$  für das Elektron im Wasserstoff!
- Leiten Sie in der Bohrschen Theorie mit Hilfe der Drehimpulsquantelung die Bahnradien ab! Was fällt Ihnen sofort auf?

#### 2. Magnetischer Dipol

Ein magnetischer Dipol  $\vec{\mu}_1$  erzeugt um sich ein Magnetfeld  $\vec{B}(\vec{r})$  das durch den Ausdruck:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\vec{\mu}_1 \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{\mu}_1 r^2}{r^5} \right) \quad (4)$$

gegeben ist.

- Berechnen Sie die Wechselwirkungsenergie zwischen zwei magnetischen Dipolen! Bei welchen Korrekturen der Energien aus der Schrödingertheorie trifft man etwas Vergleichbares an?
- Der Winkel  $\vartheta$  sei der Winkel des Verbindungsvektors zwischen den beiden Dipolen. Bei welcher Anordnung nimmt bei parallel stehenden Momenten die Energie  $E$  einen Maximalwert ein? Wann ist  $E=0$ ?

- c) Berechnen Sie im Fall b) mit  $r = 2\text{\AA}$  die Energie für die Elektron-Elektron, Elektron-Proton und Proton-Proton Wechselwirkung. Wie groß ist dabei jeweils das Magnetfeld am Ort von  $\vec{\mu}_2$ , verursacht durch  $\vec{\mu}_1$ ?

### 3. Stern-Gerlach Experiment

Bei Silber im Grundzustand befindet sich das 5s-Elektron als einziges in einer nicht abgeschlossenen Schale. Ein Strahl von Silberatomen durchlaufe nun das Feld eines inhomogenen Stern-Gerlach Magneten in x-Richtung. Das Feld sei dabei durch:

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_0\vec{e}_x + B_0\vec{e}_y + z \cdot 10^3 \frac{T}{m} \vec{e}_z \quad (5)$$

gegeben. In Richtung des Atomstrahls habe es eine Ausdehnung von  $l_1 = 4\text{cm}$ , der Auffangschirm steht im Abstand  $l_2 = 10\text{cm}$  vom Magneten entfernt.

- a) Berechnen Sie die Komponente des magnetischen Moments in Richtung der Inhomogenität des Magnetfeldes, wenn die Aufspaltung des Strahls auf dem Schirm zu  $d = 2\text{mm}$  und die Geschwindigkeit der Atome zu  $v_x = 500\text{m/s}$  gemessen wurde. Die durchschnittliche Masse von Silberatomen beträgt  $M = 1,79 \cdot 10^{-25}\text{kg}$ .
- b) Wie kann man mit diesem Experiment den g-Faktor des Elektrons bestimmen? Berechnen Sie ihn!
- c) Warum stört der Kernspin der Silberkerne das Experiment nicht wesentlich?

### 4. Drehimpulskopplung

- a) Charakterisieren Sie den Zustand eines  $3d_{5/2}$ - und eines  $3d_{3/2}$ -Elektrons durch die Quantenzahlen  $n$ ,  $l$  und  $j$ !
- b) Atome mit einem  $3d_{3/2}$ -Leuchtelektron werden durch eine Stern-Gerlach Apparatur geschickt. Der für die Strahlaufspaltung verantwortliche Drehimpuls dieser Atome sei gleich dem Gesamtdrehimpuls des Leuchtelektrons. Wie viele Teilstrahlen ergeben sich nach dem Durchlaufen der Apparatur?

### 5. Feinstruktur

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom, dessen Elektron sich in einem 3d-Zustand befindet, gemäß der Schrödingertheorie.

- a) Geben Sie an, in welche Niveaus der 3d-Zustand bei Berücksichtigung der LS-Kopplung aufspaltet!

- b) Die Energieverschiebung der Niveaus sei gegeben durch  $\Delta E = a(\vec{l} \cdot \vec{s})$ . Berechnen Sie die neuen Energieniveaus mit dieser Konstante  $a$  und skizzieren Sie die beiden neuen Zustände relativ zum ursprünglichen 3d-Zustand!

## 6. Feinstruktur

Wasserstoffähnlich nennt man Ionen, welche nur ein Elektron haben. Ihre Feinstruktur wird analog zum Wasserstoff beschrieben.

- a) Zeigen Sie, dass der Korrekturterm für die Feinstruktur und die relativistische Korrektur zu keinem möglichen Wert der Quantenzahlen  $n$  und  $j$  verschwindet, sondern stets zu einer Absenkung der Energie, also zu einer stärkeren Bindung führt!
- b) Das einfach ionisierte Helium ist ein wasserstoffähnliches Atom. In wie viele Energieniveaus spalten die Terme des einfach ionisierten Heliums, die zu den Hauptquantenzahlen  $n = 3$  und  $n = 4$  gehören, durch die Feinstruktur-Wechselwirkung auf? Berechnen Sie die Aufspaltung!
- c) Berechnen Sie die Energie der unverschobenen Niveaus und die Verschiebung relativ dazu! Für welches  $n$  und welches  $j$  entsteht die größte Verschiebung?

## 7. Hyperfeinstruktur

Die Hyperfeinstruktur beschreibt eine weitere Aufspaltung magnetischer Zustände, die analog zur Spin-Bahn Kopplung durch die Kopplung des magnetischen Moments  $\vec{\mu}_j$  mit dem des Kernspins  $\vec{\mu}_I$  entsteht.

- a) Schätzen Sie das Verhältnis  $\frac{\Delta E_{HFS}}{\Delta E_{FS}}$  der Hyperfeinaufspaltung zur Spin-Bahn Kopplung ab!
- b) Der Grundzustand von Deuterium ist in zwei Hyperfeinniveaus mit  $F = 1/2$  und  $F = 3/2$  aufgespalten. Welchen Wert muss entsprechend die dem Deuterium zugeordnete Spinquantenzahl  $I$  haben?
- c) In welche Hyperfeinzustände spaltet das  $p_{3/2}$ -Niveau des Deuteriums auf, wenn sie vom vorher ermittelten  $I$  ausgehen?