Angabe Freitag - Integration und gewöhnliche Differenzialgleichung

18. März 2011

Aufgabe 1: Zum Aufwärmen

(1) Berechne die folgenden elementaren Integrale

1 $\int x^{\frac{n}{m}}\,dx$

2 $\int \sin(x)\,dx$

3 $\int \ln(x)\,dx$

4 $\int \frac{1}{\cosh^2(ax)}\,dx$

(2) Zeige die Existenz des folgenden uneigentlichen Integrales.

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx$$

(3) Löse das folgende Integral mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{dx}{x(a+bx)}$$

(4) Zeige, ob das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}$$

konvergent ist und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

(5) Ist $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} x^2 & , \text{ für } x \in [0,1[\\ x & , \text{ für } x \in [1,2] \end{cases}$ Riemann-integrierbar?

Aufgabe 2: Integration

(1) Löse die folgenden unbestimmten Integrale:

1 $\int \frac{dx}{x\ln(x)}$

2 $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$

3 $\int \sinh^2(\eta)\,d\eta$

3 $\int \cosh^2(\eta)\,d\eta$

4 $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$ mit $a > 0$

5 $\int x^2 e^{\lambda x}\,dx$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

6 $\int \frac{e^{ax}}{b+ce^{ax}}\,dx$

7 $\int \frac{1}{1+e^{ax}}\,dx$

8 $\int (ln(x))^2\,dx$

9 $\int \tanh^2(ax)\,dx$

10 $\int \frac{1}{\cos(x)}\,dx$

Hinweis: Verwende die Zerlegung $\cos(x) = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$.

11 $\int \frac{1}{\sinh(x)}\,dx$

12 $\int \frac{dx}{a-x^2} \quad (a > 0)$

13 $\int 3^{\sqrt{2x+1}}\,dx$

14 $\int \operatorname{artanh}(x)\,dx$

Hinweis: Benutze die folgende Darstellung des $\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

(2) Prüfen sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

1 $\int\limits_0^\infty x^3 e^{-x}\,dx$

2 $\int\limits_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$

Hinweis: Integriere partiell.

3 $\int\limits_0^\infty \frac{\cos(x)}{x}\,dx$

4 $\int\limits_0^\infty x^3 e^{-x^2}\,dx$

5 $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Hinweis: Betrachte die Ableitung des arcsin.

(3) Zeige die folgende Realtion

$$\int\limits_0^\pi \cos^{2n}(x)\,dx = \frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 1}{2n\cdot(2n-2)\cdots 2}\cdot\pi \quad (n \geq 1)$$

Welche Beweismethode ist hier angebracht?

(4) Zeige, dass

$$\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x(\ln(x))^\alpha} < \infty \Leftrightarrow \alpha > 1$$

gilt.

(5) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Zeige

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

(6) Die Gammafunktion ist definiert durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

Zeige, dass $\Gamma(x)$ für $x > 0$ konvergiert.

Aufgabe 3: Gewöhnliche Differentialgleichung

(1) Lösen sie folgenden homogenen Differentialgleichungen, in dem sie zunächst das charakteristische Polynom ausrechnen und dann die Anfangsbedingungen einarbeiten.

1 $a \cdot \dot{x} + b \cdot x = 0$ mit $a, b \neq 0$ und $x(t = 0) = \Lambda$

2 $\ddot{x} + r\dot{x} = 0$ mit $r > 0$ und den Anfangsbedingungen $x(t = 0) = \rho, \dot{x}(t = 0) = v$.

3 $\ddot{x} + 2\kappa\dot{x} + \omega x = 0$ mit $\kappa^2 > \omega > 0$ und den Anfangsbedingungen $x(t = t_0) = x_0, \dot{x}(t = t_0) = 0$

(2) Löse folgendes AWP

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{x}(t = 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$