Technische Universität München
Hannah Schamoni

Ferienkurs Analysis 1
Stetigkeit und Konvergenz

Musterlösung

16.03.2011

1. Grenzwerte I

Berechnen Sie $\lim_{x\to 0\pm} f(x)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ für $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x^{-2}}}$ und skizzieren Sie den Graphen.

Lösung:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x\sqrt{1+x^{-2}}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{-\sqrt{x^2}\sqrt{1+x^{-2}}} = \lim_{x\to 0-} -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = -1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \pm\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0, \text{ da } \sqrt{1+x^2} > |x|.$$

2. Grenzwerte II

Bestimmen Sie, wenn möglich, die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to 3} \frac{3x+9}{x^2-9}$ (b) $\lim_{x\to -3} \frac{3x+9}{x^2-9}$ (c) $\lim_{x\to 0-} \frac{x}{|x|}$ (d) $\lim_{x\to 0+} \frac{x}{|x|}$

(e) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+x}{x^2-x-2}$ (f) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-5x+4}{x^2-2}$ (g) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

Lösung:

(a) $\lim_{x\to 3} \frac{3x+9}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{3}{x-3}$ existiert nicht.

(b) $\lim_{x\to -3} \frac{3x+9}{x^2-9} = \lim_{x\to -3} \frac{3}{x-3} = -\frac{1}{2}$

(c) $\lim_{x\to 0-} \frac{x}{|x|} = -1$

(d) $\lim_{x\to 0+} \frac{x}{|x|} = 1$

(e) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+x}{x^2-x-2} = \lim_{x\to -1} \frac{x}{x-2} = \frac{1}{3}$

(f) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-5x+4}{x^2-2} = \frac{16}{7}$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

3. Stetigkeit
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend, d.h. aus $x < y$ folgt $f(x) < f(y)$.
Zeigen Sie: $f : [a, b] \to [c, d]$ mit $c := f(a)$ und $d := f(b)$ ist bijektiv.

Lösung:
Aus streng monoton wachsend folgt injektiv, denn aus $x \neq y$ folgt, falls $x < y$, dass $f(x) < f(y)$, und für $x > y$, dass $f(x) > f(y)$, in jedem Fall also $f(x) \neq f(y)$.
Zur Surjektivität. Sei $z \in [c, d]$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es dann ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = z$. Also ist f surjektiv.

4. Unstetigkeit der Umkehrfunktion
Sei $D \subset \mathbb{R}$ beliebig, $f : D \to [a, b]$ bijektiv, streng monoton steigend und stetig. Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die Umkehrfunktion von f nicht stetig sein muss.

Lösung:
Ein Beispiel ist $f : [0, 1) \cup [2, 3] \to [0, 2],\ f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in [0, 1) \\ x - 1 & \text{für } x \in [2, 3]. \end{cases}$
f ist stetig. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : [0, 2] \to [0, 1) \cup [2, 3]$ mit
$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in [0, 1) \\ x + 1 & \text{für } x \in [1, 2] \end{cases}$
ist offenbar unstetig bei $x = 1$.

5. Stetige Fortsetzungen
(a) Ist $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ stetig fortsetzbar?
(b) Ist $f : \mathbb{C}\backslash\{1\} \to \mathbb{C},\ f(z) = \frac{z^n - 1}{z - 1}$ stetig fortsetzbar?

Lösung:
(a) f ist stetig als Komposition stetiger Funktionen. Für $x_n = \frac{1}{\pi n}$ ist $f(x_n) = 0$. Für $y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{1}{2}\pi}$ ist $f(y_n) = 1$. Somit existiert $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ nicht (vgl. Korollar 2.2), f ist also nicht stetig fortsetzbar.
(b) $\lim\limits_{z \to 1} \dfrac{z^n - 1}{z - 1} = \lim\limits_{z \to 1} \left(1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1}\right) = n$ (Polynomdivision; alternativ Satz von l'Hôpital)

6. Zwischenwertsatz
(a) Jedes reelle Polynom von ungeradem Grade hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.

(b) $\sqrt{\frac{x^2+2x+2}{x^4+1}} = x$ besitzt eine Lösung in $\mathbb{R}$.
(c) Jedes stetige $f : [0,1] \to [0,1]$ besitzt einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $x \in [0,1]$ mit $f(x) = x$.

Lösung:

(a) Sei $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_n \neq 0$ und n ungerade. O.E. sei $a_n > 0$. Als Polynom ist p stetig. Für $x \neq 0$ gilt
$$p(x) = x^n \left(a_n + a_{n-1}x^{-1} + a_{n-2}x^{-2} + \ldots + a_0 x^{-n}\right).$$
Der Ausdruck in der Klammer konvergiert für $x \to \pm\infty$ gegen $a_n > 0$. Somit gilt $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x) = \pm\infty$. Es gibt also ein x_- mit $p(x_-) < 0$ und ein x_+ mit $p(x_+) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $x_0 \in (x_-, x_+)$ mit $p(x_0) = 0$.

(b) Betrachte die Funktion $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+2x+2}{x^4+1}} - x$, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und stetig ist, da die Wurzelfunktion auf $\mathbb{R}^+$ stetig ist. Nun ist $f(0) = \sqrt{2} > 0$ und $f(2) = \sqrt{\frac{10}{17}} - 2 < 0$. Nach dem Zwischenwertsatz besitzt f eine Nullstelle x_0 in $(0,2)$, x_0 ist also eine Lösung der Gleichung.

(c) Sei $g(x) = f(x) - x$. Dann ist auch g stetig. Weiter ist $g(0) \in [0,1]$ und $g(1) \in [-1,0]$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also ein $x_0 \in [0,1]$ mit $g(x_0) = 0$ bzw. $f(x_0) = x_0$.

7. Stetige Bilder
Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $f \in C(M)$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antworten bzw. bringen Sie ein Gegenbeispiel.
(a) Falls $M \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist, dann ist $f(M)$ beschränkt.
(b) Falls $M \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen ist, dann ist $f(M)$ beschränkt.
(c) Falls $M \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ist, dann ist $f(M)$ beschränkt.

Lösung:

(a) Die Aussage ist *falsch*. Gegenbeispiel: $f : (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

(b) Die Aussage ist *falsch*. Gegenbeispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

(c) Die Aussage ist *wahr*. Dies lässt sich mit dem Satz von Maximum und Minimum begründen: f nimmt auf M sein Maximum und Minimum an, weshalb $f(M)$ durch diese nach oben und unten beschränkt ist.

8. Gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit
(a) Seien $D, E \subset \mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{C}$, $g : E \to \mathbb{C}$ gleichmäßig stetig mit $f(D) \subset E$. Zeigen Sie, dass die Funktion $g \circ f : D \to \mathbb{C}$ gleichmäßig stetig ist.

(b)Man zeige, dass die Funktion $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ (k ist eine natürliche Zahl > 1) auf $[0, \infty)$ gleichmäßig stetig ist, aber nicht Lipschitz-stetig.
Hinweis: Für die gleichmäßige Stetigkeit benutze man die Ungleichung: $|\sqrt[k]{a} - \sqrt[k]{b}| \leq \sqrt[k]{|a-b|}$ (ohne Beweis).

Lösung:

(a) Sei $\epsilon > 0$. Da g gleichmäßig stetig ist, gibt es $\delta' > 0$ so, dass
$|g(y) - g(y')| < \epsilon \quad \forall y, y' \in E$ mit $|y - y'| < \delta'$.
Da f gleichmäßig stetig ist, gibt es $\delta > 0$ so, dass
$|f(x) - f(x')| < \delta' \quad \forall x, x' \in D$ mit $|x - x'| < \delta$ (Def. gleichmäßige Stetigkeit mit $\epsilon := \delta'$).
Also folgt: $\forall x, x' \in D$ mit $|x - x'| < \delta$ gilt: $|g(f(x)) - g(f(x'))| < \epsilon$.

(b) Gleichmäßige Stetigkeit bedeutet: $|f(x) - f(x_0)| = \left|\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{x_0}\right| \stackrel{!}{\leq} \epsilon$.
Nach Hinweis gilt: $\left|\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{x_0}\right| \leq \sqrt[k]{|x - x_0|} \Rightarrow |x - x_0| \leq \epsilon^k =: \delta$.
Damit folgt aus $|x - x_0| < \delta$, dass $\left|\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{x_0}\right| < \epsilon$ ist.
Das gewählte δ hängt nicht von x_0 ab, also handelt es sich um gleichmäßige Stetigkeit, die für alle $x, x_0 \in D$ gilt.
Zur Lipschitz-Stetigkeit: Um zu zeigen, dass die Funktion nicht Lipschitz-stetig ist, betrachte die Lipschitz-Stetigkeit am Nullpunkt, d.h. $x_0 = 0$:
$\frac{|\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{0}|}{|x-0|} = \frac{|\sqrt[k]{x}|}{|x|} = |x^{\frac{1}{k}-1}| = |x^{\frac{1-k}{k}}| \stackrel{x \geq 0}{=} x^{\frac{1-k}{k}} \stackrel{!}{\leq} L$
$\Rightarrow \frac{1}{x^{1-\frac{1}{k}}} \leq L$, $L > 0$.
Diese Bedingung ist nicht erfüllt für $x \to 0$, weil dort $\frac{1}{x^{1-\frac{1}{k}}} \to \infty$. Somit ist die Funktion nicht Lipschitz-stetig.

9. Gleichmäßige Stetigkeit II

Untersuchen Sie, welche der folgenden Funktionen gleichmäßig stetig sind:
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$
(b) $f : [10^{-4}, \infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$
(c) $f : [\sqrt{2}, 6] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^{2011} - 18}{46 + |x|^7}$.

Lösung:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ ist *nicht gleichmäßig stetig*.
Beweis(durch Widerspruch): Sei $\epsilon > 0$. Annahme: Es gibt $\delta > 0$, so dass für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$ gilt: $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.
Wegen $|(x + \frac{\delta}{2}) - x| < \delta$ würde dann folgen, dass $|f(x + \frac{\delta}{2}) - f(x)| < \epsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Es gilt aber für $x \neq -\delta/4$:

$$\lim_{x\to\infty} |f(x + \frac{\delta}{2}) - f(x)| = \lim_{x\to\infty} |x^2 + \delta x + \frac{\delta^2}{4} - x^2| = \lim_{x\to\infty} \delta |x + \frac{\delta}{4}| = \infty,$$

Widerspruch!

(b) $f : [10^{-4}, \infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$ ist *gleichmäßig stetig*:
Beweis: Sei $\epsilon > 0$ und seien $x_1, x_2 \geq 10^{-4}$. Dann gilt:
$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| = \left|\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}\right| \leq \frac{1}{10^{-8}}|x_2 - x_1| = 10^8|x_2 - x_1|$.
Wählt man also $\delta = \frac{1}{10^8}\epsilon$, so folgt aus $x_1, x_2 \in [10^{-4}, \infty[$, $|x_1 - x_2| < \delta$, dass $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.

(c) $f : [\sqrt{2}, 6] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^{2011}-18}{46+|x|^7}$ ist stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen; außerdem ist das Intervall $[\sqrt{2}, 6]$ kompakt. Es folgt die gleichmäßige Stetigkeit (stetige Funktion auf Kompaktum).

10. Gleichmäßige Konvergenz

Entscheiden Sie, ob die folgenden auf $(0, \infty)$ definierten Funktionenfolgen nicht, punktweise oder sogar gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion konvergieren. Geben Sie, falls existent, die Grenzfunktion an.

(a) $a_n = x + \frac{1}{n}$ (b) $b_n = \frac{x}{n}$ (c) $c_n = e^x \cdot \sqrt[n]{e}$.

Lösung:

(a) Die Funktionenfolge a_n konvergiert punktweise gegen $a(x) = x$, da für festes x die Folge $(x + \frac{1}{n})$ nach den Rechenregeln für Folgen gegen x strebt. Die Konvergenz ist sogar gleichmäßig, denn unabhängig von x ist $\forall \epsilon > 0$
$|a_n - a| = |x + \frac{1}{n} - x| = \frac{1}{n} < \epsilon$,
falls $n > N := \frac{1}{\epsilon}$.

(b) Die Funktionenfolge b_n konvergiert zunächst punktweise gegen die Nullfunktion $b(x) = 0$, da für jedes feste $x > 0$ die Zahlenfolge $\left(\frac{x}{n}\right)$ nach den Rechenregeln für Folgengrenzwerte eine Nullfolge ist. Die Konvergenz ist jedoch nicht gleichmäßig, denn angenommen, es gäbe zu $\epsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$, welches nur von ϵ abhängt, so dass $|b_n(x) - 0| < 1\ \forall n > N$. Dann wählt man $n = N + 1$ und $x = N + 2$ (es muss ja für jedes $x > 0$ gelten) und erhält den Widerspruch $|b_n(x) - 0| = \left|\frac{N+2}{N+1}\right| > 1 = \epsilon$.

(c) Die Funktionenfolge c_n lässt sich umschreiben zu $c_n(x) = e^{x+\frac{1}{n}}$. Nach (a) konvergiert $(x + \frac{1}{n})$ für festes x gegen x und da die Exponentialfunktion stetig ist, konvergiert damit $c_n(x)$ (punktweise) gegen $c(x) = e^x$ für $n \to \infty$. Die Konvergenz ist jedoch nicht gleichmäßig: Sei $n > N$. Dann gilt:
$|c_n(x) - c(x)| = e^x|e^{\frac{1}{n}} - 1|$.
Die rechte Seite der Gleichung ist dabei nicht Null und kann durch Erhöhung von x beliebig groß gemacht werden, so dass sie jedes zuvor gewählte ϵ übersteigt. Also muss N in Abhängigkeit von x gewählt werden.

11. Gleichmäßige Konvergenz II
(a)Gegeben seien eine Funktionenfolge (f_n) und die Grenzfunktion f, wobei $f_n, f : \mathbb{R} \supset M \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Falls es ein $\epsilon > 0$ und eine Folge (x_n) in M gibt, so dass $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \epsilon$ für unendlich viele n, dann konvergiert f_n nicht gleichmäßig gegen f auf M.
(b) Sei $M_1 := [0,1]$, $M_2 := [1,2]$ und $f_n(x) := \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die Grenzfunktion f von f_n und entscheiden Sie, ob f_n auf M_1 bzw. M_2 sogar gleichmäßig gegen f konvergiert.

Lösung:
(a) Wir nehmen an, dass f_n auf M gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass
$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon\ \forall n > N,\ \forall x \in M$.
Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, denn es gibt $x \in \mathbb{R}$ mit $|f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon$.
Somit kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein.

(b) Für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ gilt
$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} = \frac{\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2}+x^2} \to 0 \ \ (n \to \infty)$.
Somit konvergiert f_n auf $\mathbb{R}$ punktweise gegen die Nullfunktion.
Auf M_1 ist die Konvergenz nicht gleichmäßig: Sei $x = \frac{1}{n} \in [0,1]$ und $\epsilon = 0,5$. Dann gilt:
$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{n\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}} \right| = \frac{1}{2} \geq \epsilon$.
Nach (a) ist die Konvergenz also nicht gleichmäßig.
Für $x \in M_2$ ist die Konvergenz gleichmäßig: Sei $\epsilon > 0$. Mit $N = \epsilon^{-1}$ gilt für alle $n > N$ und für alle $x \in M_2$:
$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx}{1+n^2x^2} \right| = \frac{nx}{1+n^2x^2} < \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{n} < \epsilon$.

12. Punktweise und gleichmäßige Konvergenz
Man zeige: Die Reihe $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ konvergiert punktweise für jedes $x \in (0,1)$ und sie konvergiert für jedes $r \in (0,1)$ auf dem Intervall $[-r, r]$ gleichmäßig.

Lösung:
Es genügt, die gleichmäßige Konvergenz auf $I = [-r, r]$ mit $0 < r < 1$ zu zeigen. Sei also $|x| \leq r < 1$. Dann gilt (Dreiecksungleichung):
$\left| \frac{x^n}{1-x^n} \right| \leq \frac{r^n}{1-r^n} < \frac{r^n}{1-r}$,
da $r^n < r$. Da die geometrische Reihe $\sum r^n$ konvergiert, liefert der Konvergenzsatz von Weierstraß die gleichmäßige Konvergenz dieser Reihe.