Technische Universität München
Hannah Schamoni

Ferienkurs Analysis 1
Stetigkeit und Konvergenz

Übungsblatt

16.03.2011

1. Grenzwerte I

Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0\pm} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ für $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x^{-2}}}$ und skizzieren Sie den Graphen.

2. Grenzwerte II

Bestimmen Sie, wenn möglich, die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3x+9}{x^2-9}$ (b) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{3x+9}{x^2-9}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{x}{|x|}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x}{|x|}$ (e) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+x}{x^2-x-2}$ (f) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-5x+4}{x^2-2}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

3. Stetigkeit

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und monoton wachsend, d.h. aus $x < y$ folgt $f(x) < f(y)$. Zeigen Sie: $f : [a,b] \to [c,d]$ mit $c := f(a)$ und $d := f(b)$ ist bijektiv.

4. Unstetigkeit der Umkehrfunktion

Sei $D \subset$ beliebig, $f : D \to [a,b]$ bijektiv, streng monoton steigend und stetig. Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die Umkehrfunktion von f nicht stetig sein muss.

5. Stetige Fortsetzungen

(a) Ist $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ stetig fortsetzbar?
(b) Ist $f : \mathbb{C}\backslash\{1\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{z^n-1}{z-1}$ stetig fortsetzbar?

6. Zwischenwertsatz

(a) Jedes reelle Polynom von ungeradem Grade hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.
(b) $\sqrt{\frac{x^2+2x+2}{x^4+1}} = x$ besitzt eine Lösung in $\mathbb{R}$.
(c) Jedes stetige $f : [0,1] \to [0,1]$ besitzt einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $x \in [0,1]$ mit $f(x) = x$.

7. Stetige Bilder
Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $f \in C(M)$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antworten bzw. bringen Sie ein Gegenbeispiel.
(a) Falls $M \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist, dann ist $f(M)$ beschränkt.
(b) Falls $M \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen ist, dann ist $f(M)$ beschränkt.
(c) Falls $M \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ist, dann ist $f(M)$ beschränkt.

8. Gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit
(a) Seien $C, E \subset \mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{C},\ g : E \to \mathbb{C}$ gleichmäßig stetig mit $f(D) \subset E$. Zeigen Sie, dass die Funktion $g \circ f : D \to \mathbb{C}$ gleichmäßig stetig ist.
(b)Man zeige, dass die Funktion $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ (k ist eine natürliche Zahl > 1) auf $[0, \infty)$ gleichmäßig stetig ist, aber nicht Lipschitz-stetig.
Hinweis: Für die gleichmäßige Stetigkeit benutze man die Ungleichung: $|\sqrt[k]{a} - \sqrt[k]{b}| \leq \sqrt[k]{|a-b|}$ (ohne Beweis).

9. Gleichmäßige Stetigkeit II
Untersuchen Sie, welche der folgenden Funktionen gleichmäßig stetig sind:
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ (b) $f : [10^{-4}, \infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$
(c) $f : [\sqrt{2}, 6] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^{2011}-18}{46+|x|^7}$.

10. Gleichmäßige Konvergenz
Entscheiden Sie, ob die folgenden auf $(0, \infty)$ definierten Funktionenfolgen nicht, punktweise oder sogar gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion konvergieren. Geben Sie, falls existent, die Grenzfunktion an.
(a) $a_n = x + \frac{1}{n}$ (b) $b_n = \frac{x}{n}$ (c) $c_n = e^x \cdot \sqrt[n]{e}$.

11. Gleichmäßige Konvergenz II
(a)Gegeben seien eine Funktionenfolge (f_n) und die Grenzfunktion f, wobei $f_n, f : \mathbb{R} \supset M \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Falls es ein $\epsilon > 0$ und eine Folge (x_n) in M gibt, so dass $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \epsilon$ für unendlich viele n, dann konvergiert f_n nicht gleichmäßig gegen f auf M.
(b) Sei $M_1 := [0,1]$, $M_2 := [1,2]$ und $f_n(x) := \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die Grenzfunktion f von f_n und entscheiden Sie, ob f_n auf M_1 bzw. M_2 sogar gleichmäßig gegen f konvergiert.

12. Punktweise und gleichmäßige Konvergenz
Man zeige: Die Reihe $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ konvergiert punktweise für jedes $x \in (0,1)$ und sie konvergiert für jedes $r \in (0,1)$ auf dem Intervall $[-r, r]$ gleichmäßig.