

FERIENKURS EXPERIMENTALPHYSIK 2

2010

Übung 1 - Musterlösung

1

Bei einer Temperaturänderung ΔT ändern sich die Längen der beiden Metalle unterschiedlich stark und verbiegen sich deshalb. Da wir annehmen können, dass durch die Fixierung der Abstand der beiden Metallstäbe überall konstant bei d bleibt, folgt, dass die beiden Stäbe zwei Kreissegmente über den Winkel φ darstellen:

$$\varphi = \frac{L \cdot (1 + \alpha_1 \Delta T)}{r} = \frac{L \cdot (1 + \alpha_2 \Delta T)}{r + d} \quad (1)$$

Über Gleichsetzen erhält man den Radius r des inneren Kreissegments

$$r = d \frac{1}{\frac{1 + \alpha_2 \Delta T}{1 + \alpha_1 \Delta T} - 1} \quad (2)$$

Diesen Radius kann man in Gleichung (1) einsetzen und erhält so den Kreissegmentswinkel φ um den der Zeiger des Thermometers gegenüber der Nulllage verdreht ist:

$$\varphi = \frac{L}{d} (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta T \quad (3)$$

Der Drehwinkel hängt also linear mit der Temperaturänderung zusammen. Wegen der Nullpunktswahl $\varphi = 0^\circ$ bei $\vartheta = 0^\circ C$ und der Äquivalenz der beiden Einheiten $1K$ und $1^\circ C$ können wir statt ΔT nun ϑ schreiben und auflösen:

$$\vartheta = \frac{d}{(\alpha_2 - \alpha_1)L} \varphi \quad (4)$$

Der Drehwinkel φ hängt mit dem Zeigerwinkel γ über $\frac{\varphi}{2} = \gamma$ zusammen (Abbildung 1). Das heißt

$$\vartheta = \frac{2d}{(\alpha_2 - \alpha_1)L} \vartheta \quad (5)$$

Indem wir bei $\vartheta = 0^\circ C$ die Stäbe gleicher Länge fixieren, dann bei Kontakt des Thermometers zu einem kochenden Wasserbad einen $100^\circ C$ Strich auf die Winkelskala machen und die Winkel zwischen diesem Strich und $\vartheta = 0^\circ C$ äquidistant einteilen haben wir ein alternatives Celsius-Thermometer geeicht.

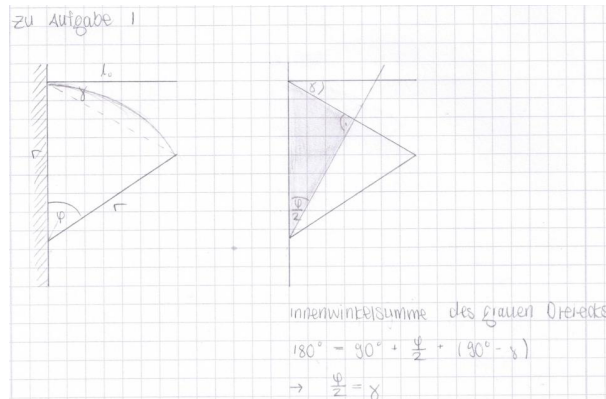


Abbildung 1: zu Aufgabe 1

2

Aus dem Gleichverteilungssatz der statistischen Mechanik folgt, dass jedes Gasmolekül im Mittel die kinetische Energie $\overline{E} = \frac{3}{2}k_B T$ hat (drei Translationsfreiheitsgrade). Also gilt:

$$\overline{E}_{kin} = \frac{3}{2}k_B T = \frac{1}{2}m\overline{v^2} \quad (6)$$

Die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit v_{rms} ergibt sich daraus als

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad (7)$$

Mit der molaren Masse M des Gases. Durch Einsetzen von $M_{H_2} = 2 \frac{g}{mol}$ und $M_{Hg} = 200,6 \frac{g}{mol}$ folgen die Geschwindigkeiten

$$\overline{v}_{rms,H_2} = 1911 \frac{m}{s} \quad (8)$$

$$\overline{v}_{rms,Hg} = 191 \frac{m}{s} \quad (9)$$

3

a) Die kritische Isotherme $p = p_{T=const}(V)$ ist durch die Bedingung, dass sie im Wendepunkt eine waagerechte Tangente (Sattelpunkt) hat, definiert

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{T_{const}} = 0, \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_{T_{const}} = 0 \quad (10)$$

Aus der van-der-Waalsschen Zustandsgleichung

$$\left(p + \frac{a\nu^2}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT \quad (11)$$

also

$$p = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \frac{a\nu^2}{V^2} \quad (12)$$

Damit folgt für Gleichung (10)

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{T=\text{const}} = -\frac{\nu RT}{(V - \nu b)^2} + \frac{2a\nu^2}{V^3} \stackrel{!}{=} 0 \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_{T=\text{const}} = \frac{2\nu RT}{(V - \nu b)^3} - \frac{6a\nu^2}{V^4} \stackrel{!}{=} 0 \quad (14)$$

Dies sind nun 2 Gleichungen für die zwei kritischen Größen T_k und V_k

$$\frac{\nu RT_k}{(V_k - \nu b)^2} = \frac{2a\nu^2}{V_k^3} \quad (15)$$

$$\frac{2\nu RT_k}{(V_k - \nu b)^3} = \frac{6a\nu^2}{V_k^4} \quad (16)$$

Teilt man die erste Gleichung durch die zweite, erhält man

$$\frac{1}{2}(V_k - \nu b) = \frac{1}{3}V_k \quad (17)$$

Also gilt

$$V_k = 3\nu b \quad (18)$$

bzw.

$$v_k = 3b \quad (19)$$

Setzt man V_k in eine der obigen beiden Gleichungen ein, lässt sich aus der Gleichung durch umstellen die kritische Temperatur T_k bestimmen

$$T_k = \frac{8}{27} \frac{a}{bR} \quad (20)$$

und durch Einsetzen von T_k und V_k in die van-der-Waals-Gleichung bekommt man den noch fehlenden kritischen Druck p_k

$$p_k = \frac{1}{27} \frac{a}{b^2} \quad (21)$$

b) Durch einsetzen der gegebenen Werte für a und b in die gerade bestimmten Gleichungen für die kritischen Größen T_k , p_k und V_k erhält man

$$v_k = 0,0954 \frac{m^3}{mol} \quad (22)$$

$$T_k = 154,5K \quad (23)$$

$$p_k = 5,05 \cdot 10^6 Pa \quad (24)$$

4

a) Aus der Zustandsgleichung des idealen Gases ergibt sich die Molzahl

$$\nu = \frac{pv}{RT} = \frac{300 \cdot 10^3 Pa \cdot 0,001 m^3}{8,314 \frac{J}{mol \cdot K} \cdot 300K} = 0,12 mol \quad (25)$$

Also ist die Zahl der im Behälter enthaltenen Argonatome

$$N = \nu N_A = 0,12 mol \cdot 6,023 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol} = 7,25 \cdot 10^{22} \quad (26)$$

b) Das mittlere Geschwindigkeitsquadrat der Argonatome hängt mit ihrer mittleren kinetischen Energie zusammen gemäß

$$\overline{E_{kin}} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} \quad (27)$$

und die mittlere kinetische Energie wiederum ist durch Druck und Volumen festgelegt:

$$pV = \frac{2}{3} N \overline{E_{kin}} \quad (28)$$

Zusammen gilt also:

$$\overline{v^2} = \frac{3pV}{Nm} \quad (29)$$

bzw.

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3pV}{M}} \quad (30)$$

mit der Gesamtmasse M des Gases. Diese errechnet sich leicht aus dem Zwischenergebnis von Teil a):

$$M = 40 \frac{g}{mol} \cdot 0,12 mol = 4,8g \quad (31)$$

Damit ergibt sich:

$$\bar{v} \approx \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3pV}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 300 \cdot 10^3 Pa \cdot 0,001 m^3}{0,0048 kg}} = 433 \frac{m}{s} \quad (32)$$

Bemerkung: Die tatsächliche mittlere Geschwindigkeit beträgt $\bar{v} = 399 \frac{m}{s}$.

c) Hat man ein Gas aus Teilchen der Anzahldichte n , die sich mit derselben Geschwindigkeit v ungeordnet in alle Richtungen bewegen, dann ist die Zahl der Teilchen, die pro Sekunde auf eine Seite einer Fläche der Größe A auftreffen, gegeben durch

$$J = jA = \frac{1}{4}nvA \quad (33)$$

Tatsächlich haben zwar nicht alle Teilchen dieselbe Geschwindigkeit, wir können aber für die Berechnung der Auftreffrate davon ausgehen, dass sie sich effektiv alle mit der mittleren Geschwindigkeit v bewegen für die wir den Näherungswert aus Teil b) verwenden. Dann ergibt sich

$$J = \frac{1}{4} \frac{N}{V} \bar{v} A = \frac{1}{4} \frac{7,25 \cdot 10^{22}}{0,001 m^3} \cdot 433 \frac{m}{s} \cdot 0,1 \cdot 10^{-6} m^2 = 7,85 \cdot 10^{20} \frac{1}{s} \quad (34)$$

d) Für die Änderung \dot{N} der Teilchenzahl im Behälter lässt sich unter Verwendung von c) eine Differentialgleichung aufstellen:

$$\dot{N} = -J = -\frac{1}{4} \frac{N}{V} \bar{v} A = -\frac{\bar{v} A}{4V} N \quad (35)$$

Also

$$\dot{N} = -\lambda N \quad (36)$$

mit $\lambda = \frac{\bar{v}A}{4V}$. Die Lösung hiervon lautet:

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t} \quad (37)$$

und die Zeit in der die Teilchenzahl auf $1/e$ der Anfangszahl gesunken ist, ergibt sich aus

$$e^{-\lambda t} = e^{-1} \quad (38)$$

zu

$$t = \frac{1}{\lambda} = \frac{4V}{\bar{v}A} = 92s \quad (39)$$

5

Die Stoffmenge Neon, die vorhanden ist, lässt sich aus der Masse berechnen

$$n_{Ne} = \frac{800g}{20,2\frac{g}{mol}} \approx 39,6mol \quad (40)$$

Das selbe geht für Helium über die ideale Gasgleichung:

$$n_{He} = \frac{p_{He}V_{He}}{RT_{He}} \approx 95,3mol \quad (41)$$

a) Für das Gesamtsystem gilt laut Aufgabe $\Delta Q = \Delta W = 0$ und damit für die beiden Teilsysteme 1 (Helium) und 2 (Neon):

$$\Delta U = 0 = Q_{12} + Q_{21} \quad (42)$$

$$\rightarrow n_{He}c_{V_{He}}(\bar{T} - T_{He}) = n_{Ne}c_{V_{Ne}}(T_{Ne} - \bar{T}) \quad (43)$$

$$\rightarrow \bar{T} = \frac{n_{He}T_{He} + n_{Ne}T_{Ne}}{n_{He} + n_{Ne}} = 315,4K \quad (44)$$

Dabei wurde verwendet, dass für die einatomigen Gase $c_{V_{Ne}} = c_{V_{He}} = \frac{3}{2}R$ ist.

b) Das Gesamtvolumen des Gefäßes beträgt laut Aufgabe und unter Verwendung des idealen Gasgesetzes für Neon

$$V_{ges} = 2m^3 + \frac{n_{Ne}RT_{Ne}}{p_{Ne}} \approx 2,54m^3 \quad (45)$$

Eine wichtige Erfahrungstatsache über Gemische idealer Gase ist, dass der resultierende Druck die Summe der von jedem Gas allein herrührenden Drücke (der sogenannten Partialdrücke) ist. Also

$$p_{Ne}V_{ges} = n_{Ne}R\bar{T} \quad (46)$$

$$p_{He}V_{ges} = n_{He}R\bar{T} \quad (47)$$

$$\rightarrow p = \frac{(n_{Ne} + n_{He})R\bar{T}}{V_{ges}} = 1,4bar \quad (48)$$

c) Die Masse von Neon $m_{Ne} = 0,8kg$ ist gegeben. Die Masse von Helium ist $m_{He} = n_{He}M_{He} = 0,385kg$ mit der molaren Masse M_{He} von Helium. Es ist

$$r_{He} = \frac{m_{He}}{m_{He} + m_{Ne}} = 0,325 \quad (49)$$

$$r_{Ne} = \frac{m_{Ne}}{m_{He} + m_{Ne}} = 0,675 \quad (50)$$

6

Die Oberfläche des Thermoskanneninneren und -äußeren A_{Zyl} sind wie in der Aufgabe angegeben näherungsweise gleich und ergeben sich aus der Geometrie von Kreis und Zylinder und A_q und h :

$$r = \sqrt{\frac{A_q}{\pi}} = 3,57cm \quad (51)$$

$$A_{zyl} = 2\pi r^2 = 0,064m^2 \quad (52)$$

a) Es kann kein Wärmetransport durch Konvektion stattfinden. Das ist durch das Modell eines soliden Aluminiumbehälters prinzipiell ausgeschlossen. Durch Wärmeleitung gibt die Thermoskanne gemäß dem Fourierschen Gesetz Wärme in die Umgebung ab. Es lautet zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$\dot{Q}_{Leitung} = \lambda \frac{A}{d}(T_a - T_i) = -1,0W \quad (53)$$

Der Wärmetransport durch Strahlung ist kompliziert, da am Aluminium immer ein Teil r der Strahlung reflektiert wird und ein Teil ϵ absorbiert wird (Energieerhaltung und Nichttransparenz führen zur Forderung $r + \epsilon = 1$). Wir müssen nun jeden Wärmebeitrag, der vom Innern der Thermoskanne ausgeht oder dort ankommt durch eine Summation erfassen. Grundlage ist das Stefan-Boltzmann-Gesetz:

$$\dot{Q}_{Strahlung} = (\epsilon^2 \sigma AT_a^4 + \epsilon^2(1 - \epsilon)^2 AT_a^4 + \epsilon^2(1 - \epsilon)^4 AT_a^4 + \dots) - (\epsilon^2 \sigma AT_i^4 + \epsilon^2(1 - \epsilon)^2 AT_i^4 + \dots) \quad (54)$$

Diese unendliche Reihe kann mithilfe der expliziten Formel für die geometrische Reihe ($|q| < 1 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$) wesentlich vereinfacht und exakt berechnet werden:

$$\dot{Q}_{Strahlung} = \epsilon^2 \sigma A \left(\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \epsilon)^{2n} \right) (T_a^4 - T_i^4) = -0,9W \quad (55)$$

Mit der Extensivität der Energie können wir die beiden Wärmeströme zu einem Gesamtwärmestrom aus dem System addieren, der das System um den Zeitpunkt $t = 0$ jede Sekunde verlässt.

$$\dot{Q}_{ges} = \dot{Q}_{Strahlung} + \dot{Q}_{Leitung} = -1,9W \quad (56)$$

b) In allen Wärmetransportgesetzen ist implizit enthalten, dass der Wärmetransport pro Zeit kleiner wird, je kleiner die Temperaturdifferenz zwischen den zwei Reservoirs ist. Folglich erhalten wir aus unserem Modell eine zu schnelle Abkühlung, wenn wir annehmen, dass \dot{Q}_{ges} des Zeitpunkts $t = 0$ für alle Zeiten so weiterfließt.

c) Mit der Wärmekapazität von Wasser können wir die Wärmemenge berechnen, die abgeführt werden muss, damit der Tee auf $\vartheta = 40^\circ C$ abkühlt:

$$Q_{kalt} = m \cdot c_W \cdot (-40K) = -167200J \quad (57)$$

Wenn diese Wärmemenge vom Wärmestrom zum Zeitpunkt $t = 0$ abtransportiert würde, dauerte dies

$$\Delta t = \frac{Q_{kalt}}{\dot{Q}_{ges}} = 24,4h \quad (58)$$

d) Die Erfahrung zeigt, dass man eine Thermoskanne nicht am einen Tag eingießen kann, dann einen ganzen Tag mit Nacht in der Kälte stehen lassen und daraus immer noch warmen Tee trinken kann. Reale Thermoskannen sind schlechter, zumal wir ja mit unserer Rechnung die Abkühlung sogar noch überschätzt haben müssten. In der Tat zeigt sich hier die zentrale Schwäche unseres Modells: Unsere Thermoskanne hat keinen Deckel, und der spielt bei einem solchen System natürlich eine große Rolle.

7

Die Eintauchtiefe des Rohres sei H und die Höhe der in das Rohr eindringenden Wassersäule h . Das im Rohr befindliche komprimierte Luftvolumen sei V und der äußere Luftdruck p_0 . Die Querschnittsfläche des Rohres sei A . Gesucht ist nun $H(p)$. An der Grenzfläche zwischen Wasser und Luft im Rohr muss der Druck p der komprimierten Luft das Wasser am Eindringen hindern. Das Wasser drängt mit dem Druck $p_0 + \rho g(H - h)$ in das Rohr, so dass man die Gleichgewichtsbedingung aufstellen kann

$$p_0 + \rho g(H - h) = p \quad (59)$$

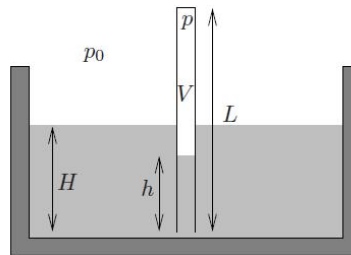


Abbildung 2: zu Aufgabe 7

(Der Druck von unten setzt sich zusammen aus dem Druck des Beckenwassers oberhalb der Grenzfläche und dem Druck der Atmosphäre auf das Beckenwasser.) Diese Bedingung liefert H als Funktion von p

$$H = \frac{p - p_0}{\rho g} + h \quad (60)$$

Um die Eindringhöhe h als Funktion von p angeben zu können, benutzt man die Adiabatangleichung (da die Messung unmittelbar nach der Positionierung des Rohres erfolgen soll, hat es noch nicht genügend Zeit für einen Wärmeaustausch gegeben) des 2-atomigen idealen Gases.

$$pV^{\frac{7}{5}} = p_0V_0^{\frac{7}{5}} \quad (61)$$

V_0 ist das Gesamtvolumen des Rohres. Setzt man nun $V_0 = AL$ und $V = A(L - h)$ ein, dann erhält man durch Auflösen nach h :

$$h = L \left(1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{5}{7}} \right) \quad (62)$$

Einsetzen in Gleichung (60) liefert:

$$H = \frac{p - p_o}{\rho g} + L \left(1 - \left(\frac{p}{p_o} \right)^{\frac{5}{7}} \right) \quad (63)$$

Der erste Term ist das Resultat, das man erhalten würde, wenn man die Luft als inkompressibel annehmen würde, also bei verschwindender Höhe h der Wassersäule im Rohr. Der zweite Term ist die Korrektur durch die Kompressibilität der Luft. Diese ist umso größer, je länger das Rohr ist.