# Parameterabhängige Integrale, Kurven, Kurvenintegrale
# Vorlesung

Marcus Jung

02.09.2010

# Inhaltsverzeichnis

**1 Einführung** **3**

**2 Eigenschaften Parameterabhängiger Integrale** **3**
2.1 Stetigkeit . . . . . 3
2.2 Integrationsreihenfolge . . . . . 3
2.3 Differentierbarkeit . . . . . 4
2.4 Leibniz-Regel für parameterabhängige Grenzen . . . . . 4
2.5 Uneigentliche parameterabhängige Integrale . . . . . 5

**3 Kurven** **6**
3.1 Definition . . . . . 6
3.2 Doppelpunkt . . . . . 7
3.3 Singularität . . . . . 7
3.4 Schnittpunkt, Schnittwinkel . . . . . 7
3.5 Bogenlänge einer Kurve . . . . . 7
3.6 Rektifizierbarkeit . . . . . 8

**4 Kurvenintegrale** **9**
4.1 Motivation . . . . . 9
4.2 Definition . . . . . 10
4.3 Additivität, Linearität . . . . . 10
4.4 Kurvenintegral eines Vektorfeldes . . . . . 10
4.5 Definition . . . . . 11
4.6 Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen über Vektorfeldern . . . . . 12

# 1 Einführung

Parameterabhängige Integrale sind Integrale, bei denen der Integrand selbst noch von einer (oder mehreren) unabhängigen Variablen abhängt, z.B. Gamma - Funktion. Für den Fall eigentlicher Integrale betrachtet man also Funktionen der Form:

$$F(x) := \int_a^b f(x,y)dy \qquad\qquad x \in I$$

Die Variable x tritt hier als Parameter auf, über diese wird nicht integriert!

Hier ist:

- $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall
- f(x,y) eine Funktion $f : I \times [a,b] \to \mathbb{R}$ bei festem $x \in I$, die als Funktion von $y$ über $[a,b]$ integrierbar sein möge

# 2 Eigenschaften Parameterabhängiger Integrale

## 2.1 Stetigkeit

Eine wichtige Eigenschaft parameterabhängiger Integrale ist die Stetigkeit:

Ist $f(x,y)$ stetig auf $I \times [a,b]$, so existiert das Integral $F(x) := \int_a^b f(x,y)dy$ für alle $x \in I$, und $F(x)$ ist auf $I$ stetig.

## 2.2 Integrationsreihenfolge

Nun betrachtet man die Wichtigkeit der Integrationsreihenfolge.

Annahmen:

- $D := [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$
- $f : D \to \mathbb{R}$ stetig
- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $F(x) := \int_a^b f(x,y)dy$

Damit gilt die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge:

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)dx)dy$$

Dies ist ein Spezialfall des Satzes von Fubini, welcher mehrdimensionale Integrale auf eindimensionale Integrale zurückführt, welche dann einfach berechnet werden können.

## 2.3 Differentierbarkeit

Nun geht es um die Vertauschbarkeit von Integration und Differenziation parameterabhängiger Integrale:

Ist $f(x,y)$ nach $x$ stetig partiell differenzierbar, dann ist $F(x)$ stetig differenzierbar, und somit gilt:

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy \qquad\qquad x \in I$$

**Einfaches Beispiel:**

$$f(x,y) = x^2 * y$$

$$a) \qquad F'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\int f(x,y)dy = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}x^2y^2) = xy^2$$

$$b) \qquad F'(x) = \int \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)dy = \int 2xydy = xy^2$$

Weitere Beispiele, u.a. Besselfunktion als Übung

## 2.4 Leibniz-Regel für parameterabhängige Grenzen

Nun betrachtet man Integrale, bei denen auch die Grenzen von Parametern abhängen, also $g(x), h(x)$.

Annahme:

- $D := [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$
- $f : D \to \mathbb{R}$ stetig
- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $F(x) := \int_a^b f(x,y)dy$
- $f$ nach $x$ stetig partiell differenzierbar
- $g, h : ]a,b[ \to ]c,d[$ stetig differenzierbar

Hängen auch die Integrationsgrenzen $(g,h)$ von Parametern ab, so erhält man für 2.3 die Differenziationsregel (Leibniz-Regel):

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy = \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)dy + f(x,h(x))h'(x) - f(x,g(x))g'(x)$$

Die Gleichung aus 2.3 ist nur ein Spezialfall der Leibniz-Regel, da die beiden letzten Terme hier wegfallen, d.h. wenn die Integrationsgrenzen nicht von Parametern abhängig sind, sind $h'(x), g'(x) = 0$ und damit fallen die beiden letzten Terme auf der rechten Seite weg.

**Beispiel zu 2.4**

$$F(x) = \int_0^{x^2} cos(xt^2)dt \rightarrow F'(x) = -\int_0^{x^2} t^2 sin(xt^2)dt + 2xcos(x^5)$$

## 2.5 Uneigentliche parameterabhängige Integrale

Zum Schluss betrachten wir noch die Differenzierbarkeit von Integralen, deren Grenze im Unendlichen liegt.

Annahme:

- $f(x, y)$ stetig und nach $x$ stetig partiell differenzierbar
- $\int_a^\infty f(x, y)dy$, $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dy$ auf kompakten Teilmengen von $I$ gleichmäßig konvergent

Unter diesen Vorraussetzungen ist auch $F(x)$ stetig differenzierbar und die Ableitung lässt sich unter das Integralzeichen ziehen:

$$F'(x) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dy$$

**Beispiel zu 2.5**

Die Ableitung der Gamma-Funktion lässt sich nun folgendermaßen berechnen:
$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} * t^{x-1}dt \quad \rightarrow \quad \Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-t} * t^{x-1} * ln(t)dt$

# 3 Kurven

Wenn man in der Mathematik von Kurven spricht, geht es um eindimensionale Objekte, die in mehrdimensionalen Räumen auftreten können, und in der Regel eine Krümmung besitzen. Eindimensional bedeutet, dass sich die Kurve nur in eine Richtung "bewegt".

## 3.1 Definition

- Eine stetige Funktion $\vec{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt eine Kurve im $\mathbb{R}^n$ oder Parameterdarstellung einer Kurve, wobei $\vec{c}(a)$ als Anfangspunkt und $\vec{c}(b)$ als Endpunkt der Kurve bezeichnet werden. Falls $\vec{c}(a) = \vec{c}(b)$ wird die Kurve als geschlossen bezeichnet.
- Ist eine Abbildung $\vec{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine $C^1$ Abbildung, ist also jede Koordinatenfunktion $c_j(t)$ stetig differenzierbar, so nennt man $\vec{c}(t)$ eine $C^1$ Kurve. Ist jede Koordinatenfunktion $c_j$ stetig differenzierbar, ist auch $\vec{c}$ stetig differenzierbar.
- Eine$C^1$ Kurve heißt glatt, falls $\forall x \in [a, b] \quad \dot{\vec{c}}(t) \neq 0$
- Die Ableitung $\dot{\vec{c}}(t)$ von $\vec{c}(t)$ heißt **Tangentialvektor an die Kurve** $\vec{c}(t)$

Beispiele

- $\vec{c}(t) := (cos(t), sin(t))^T, t \in [0, 2\pi]$, beschreibt einen Kreis im $\mathbb{R}^2$
- $\vec{c}(t) := (rcos(2\pi t), rsin(2\pi t), ht)^T, t \in \mathbb{R}$ beschreibt eine Schraubenlinie mit Radius $r > 0$

## 3.2 Doppelpunkt

Es sei $\vec{c} : I \to X$ eine Kurve. $x \in X$ heißt **Doppelpunkt** von $\vec{c}$, falls $s, t \in I$ existiert, mit $s \neq t$ und $x = \vec{c}(s) = \vec{c}(t)$

**Beispiel**:

Beim Kreis ist jeder Punkt Doppelpunkt, z.B.: $\vec{c}(0) = \vec{c}(2\pi)$

## 3.3 Singularität

Es sei $\vec{c} : I \to \mathbb{R}^m$ eine Kurve und $\vec{c}$ differenzierbar, dann ist $t \in I$ eine **singuläre Stelle** von $\vec{c}$, falls $\dot{\vec{c}}(t) = 0$

## 3.4 Schnittpunkt, Schnittwinkel

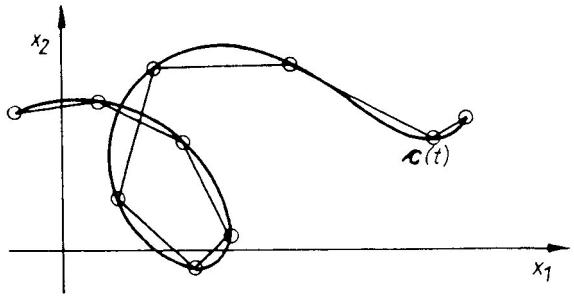
Zwei Kurven können sich im Raum schneiden. Sind die Kurven nicht identisch, d.h. es gilt nicht $\vec{c}(t) = \vec{d}(t) \quad \forall t \in I$, kann es ein oder mehrere Schnittpunkte geben mit den dazugehörigen Schnittwinkeln. Es seien $\vec{c} : I \to \mathbb{R}^m$ und $\vec{d} : J \to \mathbb{R}^m$ Kurven. $x \in \mathbb{R}^m$ heißt **Schnittpunkt** von $\vec{c}$ und $\vec{d}$, wenn ein $t \in I$ und ein $r \in J$ existiert, mit $x = \vec{c}(t) = \vec{d}(r)$
Der Winkel $\alpha$ zwischen zwei Tangentialvektoren $\dot{\vec{c}}(t), \dot{\vec{d}}(r)$ heißt Schnittwinkel von $\vec{c}, \vec{d}$ in $t$ und $r$. Es gilt:

$$cos(\alpha) = \frac{< \dot{\vec{c}}(t), \dot{\vec{d}}(r) >}{||\dot{\vec{c}}(t)| >_2 * |\dot{\vec{d}}(r)||_2}$$

## 3.5 Bogenlänge einer Kurve

Die Bogenlänge gibt einfach nur die Länge einer Kurve an. Um diese zu bestimmen hat man sich folgendes überlegt:

- Kurve $\vec{c}(t), a \leq t \leq b$ durch Kantenzug approximieren (siehe Abb.)
- Zu vorgegebener Zerlegung $Z = (a = t_0 < t_1 < ... < t_m = b)$ des Intervalls $[a, b]$ setzt man an:
  Gesamtlänge $L(Z) := \sum_{j=0}^{m-1} ||\vec{c}(t_{j+1}) - \vec{c}(t_j)||$
  Schaut man sich die Abb. an, ist es klar, dass $L(Z)$ stets kleiner gleich der tatsächlichen Länge ist. Geht $||Z|| \to 0$ erhält man die tatsächliche Länge.




## 3.6 Rektifizierbarkeit

Ist die Menge $\{L(Z) : z \in \vec{Z}[a,b]\}$ nach oben beschränkt, so heißt die Kurve $\vec{c}$ rektifizierbar und

$$L(\vec{c}) := sup\{L(Z)|Z \in \vec{Z}[a,b]\} = \lim_{||\vec{Z}||\to 0} L(Z)$$

heißt die **Länge** der Kurve $\vec{c}$
Damit lässt sich die Länge der Kurve nun einfach berechnen:

Satz:
Jede $C^1$- Kurve $\vec{c}$ ist **rektifizierbar**, und für die Länge von $\vec{c}$ gilt:

$$L(\vec{c}) = \int_a^b ||\dot{\vec{c}}||dt$$

**Beispiel:** Berechnung der Länge eines Kreises

$\vec{c}(t) = (r * cos(t), r * sin(t))^T$

$\dot{\vec{c}}(t) = (-r * sin(t), r * cos(t))^T$

$||\dot{\vec{c}}(t)|| = r \quad \rightarrow \quad L(\vec{c}) = \int_0^{2\pi} rdt = 2\pi * r$

Zum Schluss noch einige wichtige **Parametrisierungen**:

- **Polarkoordinaten:** $\vec{c}(t) = (r * cos\phi, r * sin\phi)^T$
- **Zylinderkoordinaten:** $\vec{c}(t) = (r * cos\phi, r * sin\phi, z)^T$
- **Kugelkoordinaten:** $\vec{c}(t) = (*rcos\phi * cos\theta, r * sin\phi * cos\theta, r * sin\theta)^T$

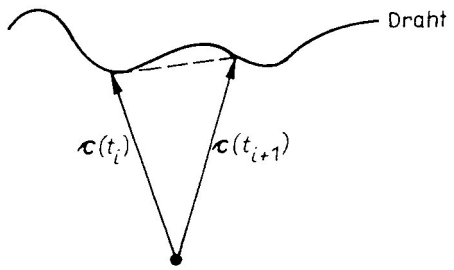
# 4 Kurvenintegrale

Nachdem wir nun die Definition und Eigenschaften von Kurven kennengelernt haben, kommen wir nun zur Integration von Kurven.

## 4.1 Motivation

Um zu verstehen, warum man sich mit Kurvenintegralen beschäftigt, betrachten wir folgende Aufgabe: Es sei ein krummliniger, evtl. inhomogen mit Masse belegter Draht gegeben. Nun fragt man sich nach der Gesamtmasse des Drahtes. Dies erreicht man durch Integration.
Die Lage des Drahtes beschreiben wir durch eine $C^1$ Kurve $\vec{x} = \vec{c}(t), \quad a \leq t \leq b$
Im Punkt $\vec{x}$ hat der Draht die ortsabhängige Massendichte

$\rho(\vec{x}) = \frac{Masse}{Längeneinheit}$




Nun arbeitet man wieder mit einer Zerlegung und approximiert die Dichte auf dem Drahtstück $\vec{c}(t_i), \vec{c}(t_{i+1})$ durch einen konstanten Wert, $\rho(\vec{c}(t_i))$ Dies kann gemacht werden, da die Wegstücke als sehr klein angenommen werden, $||\vec{c}(t_{t+1}) - \vec{c}(t)||$. Für die Gesamtmasse erhält man nun folgende Näherung:

$$\rho_{ges} = \sum_{i=0}^{m-1} \rho(\vec{c}(t_i))||\vec{c}(t_{i+1}) - \vec{c}(i)||$$

Wie schon bei der Berechnung der Bogenlänge lässt sich nun zeigen, dass diese Näherung für $||Z|| \to 0$ gegen folgendes Integral konvergiert:

$$\rho_{ges} = \int_a^b \rho(\vec{c}(t))||\dot{\vec{c}}(t)dt$$

Wichtiges Integral in der Mechanik um z.B. Gesamtmasse zu bestimmen, oder in der E-Dynamik, um z.B. Gesamtladung zu bestimmen.

## 4.2 Definition

Gegeben sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $\vec{c} : [a, b] \to D$ eine $C^1$ Kurve.
Das **Kurvenintegral** von $f(\vec{x})$ längs $\vec{c}$ wird nun definiert durch

$$\int_{\vec{c}} f(\vec{x})ds := \int_a^b f(\vec{c}(t))||\vec{c}(t)||dt$$

Im Beispiel der Berechnung der Gesamtmasse des Drahts, wäre die Gesamtmasse also durch folgendes Integral gegeben:
$\rho_{ges} = \int_{\vec{c}} \rho(\vec{x})ds$

Sollte die Kurve **geschlossen** sein, verwendet man folgendes Zeichen als Kurvenintegral:
$\oint f(\vec{x})ds$

**Bemerkung:**
Kurvenintegrale sind parametrisierungsinvariant, d.h. egal welche Parametrisierung gewählt wird (z.B. Polar-, Kugelkoordinaten), das Integral bleibt gleich.

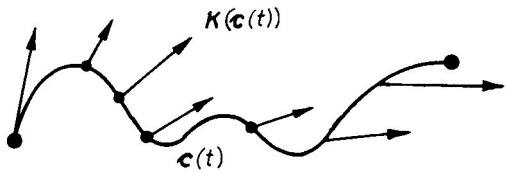
## 4.3 Additivität, Linearität

Ist $\vec{c}$ stückweise stetig differenzierbar, $c_i$ sind die einzelnen Teile der zerlegten Kurve, dann gilt: $\int_{\vec{c}} f(\vec{x})ds = \sum_i \int_{w_i} f(\vec{x})ds$
Dies ist die **Additivität**, die besagt, dass sich z.B. die Gesamtmasse des Drahtes berechnen lässt durch Addition der einzelnen Massen der Teilstücke des Drahtes.

Des Weiteren gilt:
$\int_{\vec{c}} (f(\vec{x}) + \alpha * g(\vec{x}))ds = \int_{\vec{c}} f(\vec{x})ds + \alpha * \int_{\vec{c}} g(\vec{x})ds$
Dies ist die **Linearität** des Kurvenintegrals.

## 4.4 Kurvenintegral eines Vektorfeldes

Nun geht es darum Kurvenintegrale von Vektorfeldern zu bestimmen. Ein Vektorfeld ist eine Funktion, die im Raum jedem Punkt einen Vektor zuordnet. Sie können z.B die Stärke und Richtung einer Kraft beschreiben. Wir betrachten folgende Situtation:
Ein Massenpunkt bewege sich längs einer Kurve $\vec{c}(t)$ in einem Kraftfeld $\vec{K}(\vec{x})$. Gesucht ist die physikalische Arbeit,die geleistet wird.




Approximiert wird die Kurve $\vec{c}(t)$ wieder durch Streckenzüge mit Ecken $\vec{c}(t_i)$, wobei auch hier folgende Zerlegung von $[a, b]$ gilt:
$Z = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_m = b\}$
Längs einer Teilstrecke wird das Kraftfeld $\vec{K}(\vec{x})$ durch eine konstante Kraft $\vec{K}(\vec{c}(t_i))$ approximiert. Damit erhält man für die Gesamtarbeit eine Summe von Skalarprodukten:

$$A_{ges} = \sum_{i=0}^{m-1} < \vec{K}(\vec{c}(t_i)), \vec{c}(t_{i+1} - \vec{c}(t_i) >$$

bzw. in Dimensionen n $\geq$1

$$A_{ges} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{m-1} K_j(\vec{c}(t_i)) * (c_j(t_{t+1}) - c_j(t_i))$$

Für die Zerlegung $Z$ mit $Z \to 0$ erhält man nun das Integral:
$\int\limits_a^b < \vec{K}(\vec{c}(t)), \dot{\vec{c}}(t) > dt$

## 4.5 Definition

Für ein stetiges Vektorfeld $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^n, D \subset \mathbb{R}^n$ offen, und eine $C^1$ Kurve $\vec{c} : [a, b] \to D$ wird das Kurvenintegral definiert durch:

$$\int\limits_{\vec{c}} \vec{f}(\vec{x}) d\vec{x} := \int\limits_a^b < \vec{f}(\vec{c}(t)), \dot{\vec{c}}(t) > dt$$

Sollte die Kurve **geschlossen** sein, also $\vec{c}(a) = \vec{c}(b)$ verwendet man auch hier folgendes Zeichen für das Integral:
$\oint\limits_{\vec{c}} \vec{f}(\vec{x}) d\vec{x}$

**Bemerkung:**
Auch Kurvenintegrale eines Vektorfeldes sind linear, additiv und parametrisierungsinvariant.

**Beispiel**

$$x \in \mathbb{R}^3, \vec{f}(\vec{x}) := (-y, x, z^2)^T, \vec{c}(t) := (cost, sint, at)^T, 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\int\limits_{\vec{c}} \vec{f}(\vec{x})d\vec{x} = \int\limits_{\vec{c}} (-ydx + xdy + z^2dz) =$$

$$\int\limits_0^{2\pi} [(-sint)(-sint) + cost * cost + a^2 * t^2 * a]dt = \int\limits_0^{2\pi} (1 + a^3t^2)dt = 2\pi + \frac{a^3}{3} * (2\pi)^3$$

**Bemerkung:**

Ein stetiges Vektorfeld $\vec{f}(\vec{x}), \vec{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **wirbelfrei**, falls dessen Kurvenintegral längs aller geschlossenen $C^1$ Kurven $\vec{c}(t)$ in D verschwindet, also wenn
$\forall \quad \vec{c} : \oint\limits_{\vec{c}} \vec{f}(\vec{x})d\vec{x} = 0$

Somit ist ein Vektorfeld offensichtlich genau dann wirbelfrei, wenn der Wert eines Kurvenintegrals nur von **Anfangs- und Endpunkt** des Weges, jedoch nicht vom Verlauf des Weges abhängen, das Kurvenintegral ist also **wegunabhängig**.

## 4.6 Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen über Vektorfeldern

Im folgenden werden Kriterien für Vektorfelder gesucht, die die Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen garantieren.

**Bemerkung:**

Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt zusammenhängend, falls je zwei Punkte in $D$ durch eine $C^1$ Kurve verbunden werden können. Eine offene und zuammenhängende Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Gebiet** in $\mathbb{R}^n$

Ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **einfach zusammenhängend**, wenn sich jede geschlossene Kurve $\vec{c} : [a, b] \to D$ stetig innerhalb D auf einen Punkt zusammenziehen lässt.

**Definition:**

$\vec{f} : D \to \mathbb{R}^n$ sei Vektorfeld auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$. Man bezeichnet $\vec{f}(\vec{x})$ als **Gradientenfeld**, falls es eine skalare $C^1$ Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$ gibt, mit $grad\varphi(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x})$

**Definition:**

Der Gradient ist definiert als: $gradf(\vec{x}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n})$
Er ist ein Differentialoperator, der auf ein Skalarfeld angewandt wird. Dadurch erhält man ein Vektorfeld, dass die Änderungsrate und die Richtung der größten Änderung des Skalarfeldes angibt. Anschaulich gibt der Gradient beispielsweise die Richtung des steilsten Anstieges in einem Höhenprofil (Vektorfeld) an.

**Bemerkung:**

Wenn ein Kraftfeld ein Potential besitzt, $\vec{K}(\vec{x}) = grad\varphi(\vec{x})$ wird es auch als **konservativ** bzw. energieerhaltend bezeichnet. Ist ein Kraftfeld konservativ, ist es wegunabhängig. Die funktion $U(\vec{x}) := -\varphi(\vec{x})$ ist dann die potentielle Energie.

**Also:** Besitzt ein Vektorfest ein Potential, dann ist es konservativ. Ein konservatives Vektorfeld ist wegunabhängig. Um herauszufinden, ob ein Vektorfeld wegunabhängig ist, muss man also nur noch eine Bedingung finden, die angibt, wann ein Vektorfeld ein Potential besitzt!

Dies ist die sogenannte **Integrabilitätsbedingung**:

Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Ein $C^1$ Vektorfeld $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^n$ besitzt genau dann ein Potential auf $D$, falls die Integrabilitätsbedingung

$\forall \vec{x} \in D : J\vec{f}(\vec{x}) = (J\vec{f}(\vec{x}))^T$, also $\frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_k}$,

erfüllt ist.

**Bemerkung:**

Für den Fall n=3 mit Vektorfeld $\vec{f}(\vec{x}), \vec{x} \in \mathbb{R}^3$ und einem $C^1$ Gradientenfeld $\vec{f}(\vec{x}) = grad\varphi(\vec{x})$ hat man: $rot\vec{f}(\vec{x}) = rotgrad\varphi(\vec{x}) = 0$, d.h ist $rot\vec{f}(\vec{x}) = 0$, hat man ein Gradientenfeld, welches ja wie beschrieben ein Potential besitzt und somit wegunabhängig ist. Also lautet die Integrabilitätsbedingung im $\mathbb{R}^3$: $rot\vec{f}(\vec{x}) = 0$