

Ferienkurs Elektrodynamik 2010

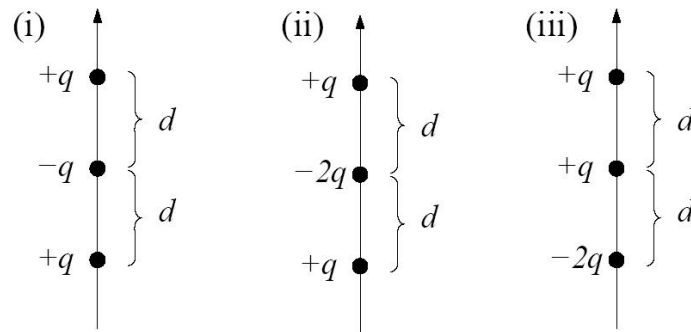
Musterlösung für Dienstag, den 16. März

Carl Hippler

1 Multiple Choice

- Das elektrische Dipolmoment einer Ladungskonfiguration
 - ist von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig.
 - ist von der Wahl des Koordinatensystems abhängig, wenn die Gesamtladung ungleich null ist.
 - ist immer von der Wahl des Koordinatensystems abhängig.
- Eine Punktladung q befinde sich am Ort $\vec{r} \neq \vec{0}$. Dann gilt für ihr Dipolmoment:
 - Es ist gleich $q \cdot \vec{r}$.
 - Es ist gleich $\vec{0}$.
- Ein positiv geladenes Teilchen befindet sich in einem homogenen elektrischen und homogenen magnetischen Feld. Beide Feldrichtungen sind parallel. Weitere Felder sind nicht vorhanden. Das Teilchen wird zunächst festgehalten und dann plötzlich losgelassen. Das Teilchen bewegt sich
 - auf einer Kreisbahn.
 - auf einer Parabel.
 - auf einer Geraden.
 - auf einer Zykloide.

4. Betrachte folgende Anordnungen ruhender Ladungen im Vakuum. Es befinde sich immer die mittlere Punktladung im Koordinatenursprung. Gib für jede Anordnung die führenden Potenzen von $r = |\vec{r}|$ an, mit denen das elektrostatische Potential $\Phi(\vec{r})$ bei großem r abfällt.



- (i) $\frac{1}{r}$ $\frac{1}{r^2}$ $\frac{1}{r^3}$
- (ii) $\frac{1}{r}$ $\frac{1}{r^2}$ $\frac{1}{r^3}$
- (iii) $\frac{1}{r}$ $\frac{1}{r^2}$ $\frac{1}{r^3}$

5. Was für allgemeine Stetigkeitsbedingungen gelten an Grenzflächen? Richtige Antworten ankreuzen!

- Die Normalkomponente von \vec{B} ist stetig.
- Die Tangentialkomponente von \vec{B} ist stetig.
- Die Normalkomponente von \vec{H} ist stetig, falls keine freien Oberflächenströme an der Grenzfläche fließen.
- Die Tangentialkomponente von \vec{H} ist stetig, falls keine freien Oberflächenströme an der Grenzfläche fließen.

2 Multipolmomente

1. Die Ladungsdichte lässt sich schreiben als

$$\varrho(\vec{r}) = q \cdot \delta(x - a) \delta(y) \delta(z) + q \cdot \delta(x + a) \delta(y) \delta(z) - q \cdot \delta(x) \delta(y - a) \delta(z) - q \cdot \delta(x) \delta(y + a) \delta(z) .$$

Das Monopolmoment ergibt sich zu

$$Q = \int \varrho(\vec{r}) d^3r = 0.$$

Für das Dipolmoment \vec{p} liefert die Rechnung

$$\vec{p} = \int \vec{r} \cdot \varrho(\vec{r}) d^3r = \sum_{i=0}^n q_i \cdot \vec{r}_i = q \cdot \left(\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \vec{0}.$$

Die Quadrupolmomente sind allgemein gegeben durch

$$Q_{ij} = \int \left(x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \cdot r^2 \right) \varrho(\vec{r}) d^3r$$

Die Nichtdiagonalelemente sind in diesem Fall gleich null, da für $i \neq j$ $\delta_{ij} = 0$ ist und beim Term $x_i x_j$ immer eine der beiden Koordinaten durch die Integration bei 0 ausgewertet wird. Für die Diagonalelemente erhält man:

$$\begin{aligned} Q_{xx} &\equiv Q_{11} = \int \left(\frac{2}{3} x^2 - \frac{1}{3} y^2 - \frac{1}{3} z^2 \right) \varrho(\vec{r}) d^3r \\ &= q \left(\frac{2}{3} a^2 + \frac{2}{3} a^2 + \frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{3} a^2 \right) = 2qa^2 \\ Q_{yy} &\equiv Q_{22} = \int \left(-\frac{1}{3} x^2 + \frac{2}{3} y^2 - \frac{1}{3} z^2 \right) \varrho(\vec{r}) d^3r \\ &= q \left(-\frac{1}{3} a^2 - \frac{1}{3} a^2 - \frac{2}{3} a^2 - \frac{2}{3} a^2 \right) = -2qa^2 \\ Q_{zz} &\equiv Q_{33} = \int \left(-\frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{3} y^2 + \frac{2}{3} z^2 \right) \varrho(\vec{r}) d^3r \\ &= q \left(-\frac{1}{3} a^2 - \frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{3} a^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

Dieses Beispiel verdeutlicht noch einmal, dass der Tensor Q_{ij} spurlos ist. Der Tensor in kompakter Form ist also:

$$(Q_{ij}) = \begin{pmatrix} 2qa^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2qa^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Die Ladungsdichte ist gegeben durch

$$\varrho(\vec{r}) = q \delta^3(\vec{r}) - \frac{q}{\pi a^2} \delta(z) \theta(a - r)$$

mit der Heaviside-Funktion

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Für die Gesamtladung bei dieser Ladungskonfiguration $Q = 0$. Das Dipolmoment ist aus Symmetriegründen gleich null, was auch durch eine Rechnung gezeigt werden kann:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \int \vec{r} \cdot \varrho(\vec{r}) \, d^3r \\ &= q \int \left(\delta^3(\vec{r}) \cdot \vec{r} - \frac{1}{\pi a^2} \delta(z) \theta(a - \sqrt{x^2 + y^2}) \cdot \vec{r} \right) d^3r \\ &= 0 - \frac{q}{\pi a^2} \int_{x^2 + y^2 \leq a^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} dx dy \\ &= \int_0^a dr r \int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} r \cos \vartheta \\ r \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \end{aligned}$$

Die Quadrupolmomente Q_{xz} , Q_{yz} und damit wegen der Symmetrie des Tensors auch Q_{zx} und Q_{zy} sind gleich null aufgrund von z und $\delta(z)$ unter dem Integral. Es gilt für $Q_{xy} = Q_{yx}$:

$$Q_{xy} = \int xy \varrho(\vec{r}) \, d^3r = 0 - \frac{q}{\pi a^2} \int_0^a dr r \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \cos \vartheta \sin \vartheta = 0$$

Wir berechnen von den Diagonalelementen zunächst Q_{zz} :

$$\begin{aligned} Q_{zz} &= \int \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}y^2 + \frac{2}{3}z^2 \right) \varrho(\vec{r}) \, d^3r \\ &= 0 + \frac{q}{3\pi a^2} \int_0^a dr r \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 = \frac{q}{3\pi a^2} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4}a^4 = \frac{1}{6} q a^2 \end{aligned}$$

Die beiden anderen Diagonalelemente Q_{xx} und Q_{yy} müssen aus Symmetriegründen gleich sein. Da der Quadrupoltensor spurlos ist, gilt:

$$Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{12} q a^2$$

Als Matrix geschrieben, lautet der Quadrupoltensor damit:

$$(Q_{ij}) = \frac{q a^2}{12} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3 Dipolfelder

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_{\text{dip}} &= -\vec{\nabla}\Phi_{\text{dip}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{r} \circ \vec{p}}{r^3} \right) \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{\nabla}(\vec{r} \circ \vec{p})}{r^3} + (\vec{r} \circ \vec{p}) \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r^3} \right) \right) \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} (\vec{p} \times (\vec{\nabla} \times \vec{r}) + (\vec{p} \circ \vec{\nabla})\vec{r}) - (\vec{r} \circ \vec{p}) \cdot \left(\frac{3\vec{r}}{r^5} \right) \right) \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{p}}{r^3} - (\vec{r} \circ \vec{p}) \cdot \left(\frac{3\vec{r}}{r^5} \right) \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\vec{p}}{r^3} + (\vec{r} \circ \vec{p}) \cdot \left(\frac{3\vec{r}}{r^5} \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{B}_{\text{dip}}(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3} \right) \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{r^3} (\vec{\nabla} \times (\vec{\mu} \times \vec{r})) + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r^3} \right) \times (\vec{\mu} \times \vec{r}) \right) \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{r^3} \left(-(\vec{\mu} \circ \vec{\nabla})\vec{r} + \vec{\mu} (\vec{\nabla} \circ \vec{r}) \right) - \frac{3\vec{r}}{r^5} \times (\vec{\mu} \times \vec{r}) \right) \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{2\vec{\mu}}{r^3} - \frac{3}{r^5} (r^2 \vec{\mu} - (\vec{\mu} \circ \vec{r}) \vec{r}) \right) \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{\mu} \circ \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{\mu}}{r^3} \right)
 \end{aligned}$$

4 Wechselwirkung zweier elektrischer Dipole

Wir zeigen zunächst, dass die potenzielle Energie eines elektrischen Dipols \vec{p} im elektrischen Feld $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ gegeben ist durch

$$W = -\vec{p} \circ \vec{E}.$$

Dazu betrachten wir eine Dipolanordnung aus einer Punktladung $-q$ bei \vec{r} und einer entgegengesetzt gleichen Ladung $+q$ bei $\vec{r} + \vec{a}$. Die potenzielle Energie der Dipolanordnung ergibt sich dann zu

$$W = -q \cdot \Phi(\vec{r}) + q \cdot \Phi(\vec{r} + \vec{a}) = q(\Phi(\vec{r} + \vec{a}) - \Phi(\vec{r})) = q(\vec{a} \circ \vec{\nabla}\Phi + O(a^2)) = -q(\vec{a} \circ \vec{E} + O(a^2)).$$

Hierbei sind $O(a^2)$ Terme mit der dominierenden Ordnung a^2 . Für einen perfekten Dipol ist nun der Dipol-Limes $a \rightarrow 0$, $q \cdot \vec{a} = \vec{p} = \text{konstant}$ zu bilden, und man erhält so für die potenzielle Energie

$$W_{\text{dip}} = -\vec{p} \circ \vec{E}. \quad (1)$$

Wie in Aufgabe 1 explizit ausgerechnet wurde, lautet das von einem im Ursprung lokalisierten Dipol \vec{p}_1 hervorgerufene elektrische Feld

$$\vec{E}_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\vec{p}_1}{r^3} + (\vec{r} \circ \vec{p}_1) \cdot \left(\frac{3\vec{r}}{r^5} \right) \right). \quad (2)$$

Wenn man Gleichung 2 in Gleichung 1 einsetzt, erhält man schließlich, dass ein anderer Dipol \vec{p}_2 am Ort $\vec{r} \equiv \vec{r}_{12}$ im Feld des Dipols \vec{p}_1 die potenzielle Energie

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{p}_1 \circ \vec{p}_2}{r_{12}^3} - 3 \frac{(\vec{r}_{12} \circ \vec{p}_1)(\vec{r}_{12} \circ \vec{p}_2)}{r_{12}^5} \right)$$

besitzt, was zu zeigen war.

5 Amperèsches Durchflutungsgesetz

- Wir wählen als Integrationsweg ein Rechteck $L \cdot L'$, dessen zwei Seiten der Länge L' die Spule schneiden, die anderen beiden Seiten der Länge L verlaufen parallel zur Spulenachse, eine innerhalb und eine außerhalb der Spule. Die Spulenachse zeige in z -Richtung. Mit dem Amperèschen Durchflutungsgesetz erhält man dann:

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \circ d\vec{r} = B_{\text{innen},z} \cdot L - B_{\text{außen},z} \cdot L = \mu_0 I_S = \mu_0 N I$$

Die Integration über die beiden Seiten, die die Spule schneiden, liefert keinen Beitrag, da das Magnetfeld hier immer senkrecht zum Wegelement $d\vec{r}$ steht. Nun ist das Magnetfeld außerhalb der Spule vernachlässigbar, also $B_{\text{außen},z} = 0$. Somit gilt für die z -Komponente des Magnetfeldes im Innern der Spule:

$$B_{\text{innen},z} = \mu_0 \frac{N}{L} I = \mu_0 n I \quad (3)$$

Das Magnetfeld in der Spule weist keine radialen Komponenten auf, sondern ist parallel zur Spulenachse gerichtet, so dass also gilt:

$$B_{\text{innen}} = \mu_0 n I \quad (4)$$

Außerhalb der Spule gilt

$$B_{\text{außen}} = 0. \quad (5)$$

- Wir integrieren auf einem Kreis mit dem Radius r und Mittelpunkt auf der Achse des Koaxialkabels. Für den Raum zwischen den beiden

Hohlzylindern erhalten wir unter Anwendung des Amperèschen Durchflutungsgesetzes:

$$\oint_{\partial S} \vec{H} \circ d\vec{r} = I_{\text{eingeschlossen}} = I$$

Somit gilt:

$$2\pi r H = I \quad \Rightarrow \quad H = \frac{I}{2\pi r}, \quad (6)$$

$$\text{also} \quad \vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi. \quad (7)$$

Das magnetische Feld \vec{B} lässt sich wie folgt berechnen:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \frac{(1 + \chi_m) I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi \quad (8)$$

6 Kraft auf eine Leiterschleife

Die Kraft auf die Leiterschleife ist gegeben durch

$$\vec{F} = I \int d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (9)$$

Wie man leicht sehen kann, heben sich die Kräfte auf die beiden Seiten, die senkrecht zum Draht stehen, auf. Die Kraft auf die untere Seite der Schleife ist

$$F_1 = I \cdot a \cdot B(s) = I \cdot a \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi s} = \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi s}. \quad (10)$$

Sie ist nach oben gerichtet. Auf die obere Seite wirkt die Kraft

$$F_2 = I \cdot a \cdot B(s+a) = I \cdot a \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi(s+a)} = \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi(s+a)}, \quad (11)$$

welche nach unten gerichtet ist. Die resultierende Kraft ist schließlich die Vektorsumme beider Kräfte; sie wirkt nach oben und hat den Betrag

$$F_{\text{ges}} = F_1 - F_2 = \frac{\mu_0 I^2 a^2}{2\pi s(s+a)}. \quad (12)$$

7 Biot-Savart-Gesetz

Wir verwenden das Biot-Savart-Gesetz

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

wobei \vec{r} der Raumpunkt ist, an dem wir das Magnetfeld betrachten, und \vec{r}' der Ortsvektor, mit dem wir die Leiterschleife abfahren. Wir setzen für die Integration die Schleife in die xy-Ebene und ihren Mittelpunkt in den Ursprung. Auf diese Weise lässt sich die Schleife parametrisieren durch

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \\ 0 \end{pmatrix}; \quad t \in [0; 2\pi]. \quad (13)$$

Das infinitesimale Leitersegment $d\vec{r}'$ ist dann

$$d\vec{r}' = \dot{\vec{r}}'(t) dt = R \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt. \quad (14)$$

Wir wollen das Magnetfeld in einem Punkt $\vec{r} = z \vec{e}_z$ über dem Mittelpunkt der Leiterschleife betrachten, damit ergibt sich

$$\vec{r} - \vec{r}' = \begin{pmatrix} -R \cos t \\ -R \sin t \\ z \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\text{und} \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = (R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t + z^2)^{\frac{1}{2}} = (R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

Wenn man die Gleichungen 15 und 16 in das Biot-Savart-Gesetz einsetzt, erhält man

$$\begin{aligned} \vec{B}(z \vec{e}_z) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} dt \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} -R \cos t \\ -R \sin t \\ z \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mu_0 I R}{4\pi (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} dt \begin{pmatrix} z \cos t \\ z \sin t \\ R(\sin^2 t + \cos^2 t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mu_0 I R}{4\pi (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} dt \begin{pmatrix} z \cos t \\ z \sin t \\ R \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mu_0 I R}{4\pi (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi R \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z \end{aligned} \quad (17)$$

8 Magnetischer Dipol

Das Magnetfeld eines magnetischen Dipols ist, wie in der ersten Aufgabe schon aus dem Vektorpotenzial berechnet,

$$\vec{B}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{\mu} \circ \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{\mu}}{r^3} \right).$$

Das gesamte Magnetfeld ist eine Superposition des homogenen Magnetfeldes und des Dipolfeldes:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_0 + \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{\mu} \circ \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{\mu}}{r^3} \right) \quad (18)$$

Wenn es eine Kugel im Ursprung gibt, durch die keine magnetischen Feldlinien ein- und austreten, muss das Magnetfeld überall auf der Oberfläche dieser Kugel eine Tangente an die Kugel bilden, das heißt \vec{B} steht senkrecht zum Radiusvektor. Es sei R der gesuchte Radius der Kugel. Dann soll die Bedingung

$$\vec{B} \circ \vec{r} \Big|_{r=R} \stackrel{!}{=} 0 \quad (19)$$

erfüllt werden. Für unser \vec{B} aus Gleichung 18 gilt mit $\vec{\mu} = -\mu \vec{e}_z$:

$$\begin{aligned} & \left(\vec{B}_0 + \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{\mu} \circ \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{\mu}}{r^3} \right) \right) \circ \vec{r} \\ &= \left(B_0 \vec{e}_z + \frac{\mu_0}{4\pi} \left(-\frac{3\mu z \vec{r}}{r^5} + \frac{\mu \vec{e}_z}{r^3} \right) \right) \circ \vec{r} \\ &= \left(B_0 + \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\mu}{r^3} \right) \vec{e}_z \circ \vec{r} - \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3\mu z}{r^5} \vec{r} \circ \vec{r} \\ &= B_0 \cdot z + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu}{r^3} \cdot z - 3 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu}{r^3} \cdot z \\ &= \left(B_0 - 2 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu}{r^3} \right) \cdot z \end{aligned}$$

Wenn man dies in Gleichung 19 einsetzt, erhalten wir für den Radius der Kugel

$$\begin{aligned} \left(B_0 - 2 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu}{r^3} \right) \cdot z \Big|_{r=R} &= 0 \\ \left(B_0 - \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{R^3} \right) \cdot z &= 0 \quad | : z \neq 0 \\ B_0 &= \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{\mu}{R^3} \\ R &= \sqrt[3]{\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{B_0}}. \end{aligned}$$

Das Feldlinienbild des gesamten Magnetfeldes ist in Abbildung 1 skizziert.

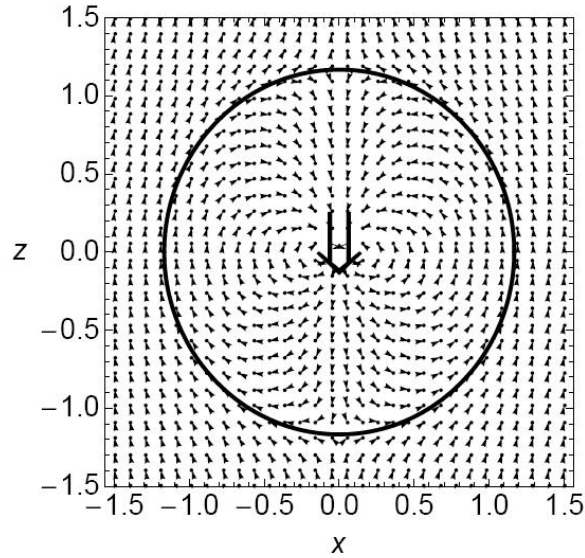


Abbildung 1: Skizze des Gesamtmagnetfeldes

9 Rotierende Hohlkugel

1. Die Raumladungsdichte lautet

$$\varrho(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi R^2} \delta(r - R), \quad (20)$$

wobei $r = |\vec{r}|$. Die Geschwindigkeit \vec{v} für einen Punkt \vec{r} auf der Kugeloberfläche lässt sich schreiben als

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \vec{e}_z \times \begin{pmatrix} R \cos \varphi \sin \vartheta \\ R \sin \varphi \sin \vartheta \\ R \cos \vartheta \end{pmatrix} = \omega R \sin \vartheta \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Daraus erhält man dann für die Stromdichte:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \varrho(\vec{r}) \cdot \vec{v}(\vec{r}) = \frac{Q \omega \sin \vartheta}{4\pi R} \delta(r - R) \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

2. Das magnetische Moment der rotierenden Kugel ist gegeben als

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) d^3r.$$

Durch Ausdrücken von \vec{r} in Polarkoordinaten und Einsetzen der Strom-

dichte wird wird hieraus:

$$\begin{aligned}
\vec{\mu} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta r^2 \sin \vartheta \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \vartheta \\ r \sin \varphi \sin \vartheta \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix} \times \frac{Q \omega \sin \vartheta}{4\pi R} \delta(r - R) \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{Q \omega}{8\pi R} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta r^3 \sin^2 \vartheta \delta(r - R) \cdot \begin{pmatrix} -\cos \varphi \cos \vartheta \\ -\sin \varphi \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} \\
&= \frac{Q \omega}{8\pi R} \cdot 2\pi \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\vartheta r^3 \sin^3 \vartheta \delta(r - R) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{Q \omega R^2}{4} \int_0^\pi d\vartheta \sin^3 \vartheta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{Q \omega R^2}{4} \vec{e}_z \int_0^\pi d\vartheta (1 - \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta \\
&= \frac{Q \omega R^2}{4} \vec{e}_z \left[-\cos \vartheta + \frac{1}{3} \cos^3 \vartheta \right]_0^\pi \\
&= \frac{Q \omega R^2}{4} \cdot \frac{4}{3} \vec{e}_z \\
&= \frac{Q \omega R^2}{3} \vec{e}_z
\end{aligned}$$