

FERIENKURS EXPERIMENTALPHYSIK 4

WS09/10

Übung 3: Musterlösung

1 Elektronenpotential

Wie sieht das Potential für das zweite Elektron im He-Atom aus, wenn das erste Elektron durch eine 1s-Wellenfunktion beschrieben werden kann, d.h. die Wechselwirkung zwischen beiden Elektronen nur summarisch berücksichtigt wird. $\left(\Psi_{1s} = \frac{Z^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi} \cdot a_0^{\frac{3}{2}}} e^{-Z \frac{r_1}{a_0}} \right)$

Lösung Das Potential für das zweite Elektron im He-Atom ist:

$$\phi(\vec{r}_2) = -\frac{Z \cdot e}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{|\Psi_{1s}(r_1)|^2}{r_{12}} d\tau$$

wobei Ψ_{1s} die Wellenfunktion des ersten Elektrons ist.

$$r_{12}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta$$

$$\Rightarrow r_{12} dr_{12} = r_1 r_2 \sin \theta d\theta$$

$$d\tau = r_1^2 dr_1 \sin \theta d\theta d\phi$$

Einsetzen liefert für das Integral

$$I = \int \frac{|\Psi_{1s}|^2}{r_{12}} r_1^2 \sin \theta dr_1 d\theta d\phi =$$
$$\frac{Z^3 \pi}{\pi a_0^3} \left[\int_{r_1=0}^{r_2} \frac{e^{-Z \cdot 2 \frac{r_1}{a_0}} r_1^2}{r_1 r_2} dr_1 \int_{r_{12}=r_2-r_1}^{r_2+r_1} dr_{12} + \int_{r_1=r_2}^{\infty} \frac{e^{-Z \cdot 2 \frac{r_1}{a_0}} r_1}{r_2} dr_1 \int_{r_{12}=r_1-r_2}^{r_1+r_2} dr_{12} \right]$$

weil für $\theta = 0$ gilt:

$$r_{12} = r_2 - r_1 \quad \text{für } r_1 < r_2; \quad r_{12} = r_1 - r_2 \quad \text{für } r_2 < r_1$$

für $\theta = \pi$ folgt $r_{12} = r_1 + r_2$. Ausführen der Integration ergibt mit $r_1 = r_2$ das gesamte Potential:

$$\phi(r) = -\frac{(Z-1)e}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Z}{a_0} + \frac{1}{r} \right) e^{-2Z \frac{r}{a_0}}$$

mit $Z=2$ für das He-Atom.

2 Helium-Atom

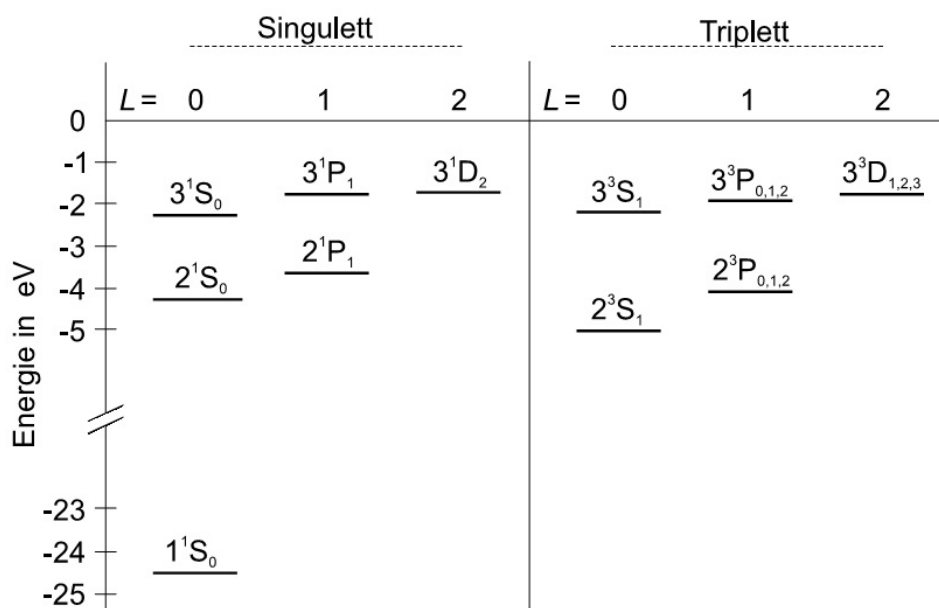
a) Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt aus dem Termschema des Helium-Atoms für die niedrigsten Energieniveaus: Gegeben sind die Energien der einzelnen Energieniveaus sowie der jeweilige Drehimpuls L . Mögliche Aufspaltungen der Energieniveaus durch Feinstruktur sind nicht eingezeichnet. Beschriften Sie die Energieniveaus vollständig mit den entsprechenden, spektroskopischen Symbolen (nicht aus Vorlesung abschreiben). Welches der beiden Termschemata gehört zum Triplet- welches zum Singulett-Helium? (Beschriften Sie die gestrichelten Linien.)

b) Erläutern Sie den Unterschied zwischen dem Triplet- und Singulett-System des Helium-Atoms. Welches der beiden Systeme weist für $L \neq 0$ Feinstrukturaufspaltung auf? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Warum gibt es keinen 1^3S_1 -Zustand? Geben Sie für diesen (hypothetischen) Zustand für beide Elektronen alle relevanten Quantenzahlen an.

d) Warum werden die Übergänge $2^1S_0 \rightarrow 1^1S_0$ und $2^3S_1 \rightarrow 1^1S_0$ nicht beobachtet?

Lösung a)



b) Singulett-System: Spins der beiden Elektronen koppeln zu $S=0$, d.h. Spins der beiden Elektronen sind antiparallel. Alle Terme im Parahelium sind einfach.

Triplet-System: Spins koppeln zu $S=1$, d.h. Spins der beiden Elektronen sind paral-

lel. Durch die LS-Kopplung kommt es im Orthohelium zur Feinstrukturaufspaltung. Die Terme sind dreifach aufgespalten.

c) Es gilt $S=1$, also $m_{s_1} = m_{s_2} = +1/2$. Die Quantenzahlen für den 1^3S_1 -Zustand wären daher:

	n	l	m_l	m_s
Elektron1	1	0	0	+1/2
Elektron2	1	0	0	+1/2

Für Fermionen gilt das Pauli-Prinzip, welches besagt, dass zwei Fermionen (Elektronen) nicht in allen Quantenzahlen übereinstimmen dürfen. Nach dem Pauli-Prinzip ist der 1^3S_1 -Zustand also verboten.

d) $2^1S_0 \rightarrow 1^1S_0$ Übergänge mit $J = 0 \rightarrow J = 0$ sind verboten.

oder

$\Delta l = 0$ ist für Dipolstrahlung verboten.

$2^3S_1 \rightarrow 1^1S_0$ Interkombinationsverbot, Spinflips sind verboten.

oder

$\Delta l = 0$ ist für Dipolstrahlung verboten.

3 L-S vs. j-j-Kopplung

Man diskutiere ein Zweielektronensystem mit einem 2p und einem 3d Elektron für den Fall der jj-Kopplung und zeige, dass die Zahl der möglichen Zustände und deren Gesamtdrehimpuls J die gleichen sind wie bei der LS-Kopplung.

Lösung

a) LS-Kopplung: $l_1 = 1; l_2 = 2 \rightarrow L = 1, 2, 3$ und $s_1 = \frac{1}{2}; s_2 = \frac{1}{2} \rightarrow S = 0, 1$

Mögliche Zustände:

S \ L	1	2	3
0	1P_1	1D_2	1F_3
1	$^3P_{0,1,2}$	$^3D_{1,2,3}$	$^3F_{2,3,4}$

Jeder Term umfaßt $(2J+1)$ Zustände, also gibt es insgesamt 60 Zustände.

b) jj-Kopplung: $l_1 = 1; s_1 = \frac{1}{2} \rightarrow j_1 = \frac{1}{2}; \frac{3}{2}$ und $l_2 = 2; s_2 = \frac{1}{2} \rightarrow j_2 = \frac{3}{2}; \frac{5}{2}$

Mögliche Zustände:

$\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow J = 1; 2$ $\left(\frac{3}{2}\right) \rightarrow J = 0; 1; 2; 3$

$\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow J = 2; 3$ $\left(\frac{5}{2}\right) \rightarrow J = 1; 2; 3; 4$

Es ergeben sich dieselben Häufigkeiten der verschiedenen J-Werte, also auch dieselbe Gesamtzahl von Zuständen.

4 Einsteinium und exotische Atome

Berechnen Sie für ein fast vollständig ionisiertes Einsteiniumion (${}_{99}^{254}\text{Es}^{98+}$) den Bahnradius und die Gesamtenergie im Grundzustand mit verschiedenen gebundenen Teilchen in der Hülle ($a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m_e}$):

- ein Elektron
- ein Myon $m_\mu \approx 207m_e$
- ein Anti-Proton
- Berechnen sie für alle drei Fälle die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im 1s-Zustand innerhalb des Kern-Volumens ($R_K \approx 1.4 \cdot \sqrt[3]{A} fm$). Verwenden Sie $R_{10}(r) = \sqrt{\frac{\alpha^3}{2}} e^{-\frac{\alpha r}{2}}$ mit $\alpha = \frac{2Z}{a_0}$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Lösung

a) Elektron

$$r_n = \frac{n^2}{Z} a_0$$

$$E_n = -\frac{Z^2}{n^2} E_R, \quad E_\infty = E_R = 13,6 eV$$

für $n=1, Z=99$:

$$r_1(\text{Es}) = 5.35 \cdot 10^{-13} m$$

$$E_1(\text{Es}) = 133 keV$$

b) Myon $m_\mu \approx 207m_e$

$$a_0^\mu = \frac{1}{207} a_0 \rightarrow r_1^\mu(\text{Es}) = 2.58 \cdot 10^{-15} m$$

$$E_R^\mu = 207 \cdot E_R \rightarrow E_1^\mu(\text{Es}) = 27 MeV$$

c) Anti-Proton

$$r_1^{p^-} = \frac{m_e}{m_p} \frac{a_0}{Z} = 2.9 \cdot 10^{-16} m$$

$$E_1^{p^-}(\text{Es}) = -\frac{m_{p^-}}{m_e} \cdot E_R \cdot \frac{Z^2}{n^2} = 0.24 GeV$$

d) Radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeit erhält man durch Integration bis zum Kernrand

$$P_{10}(R) = \int_0^R r^2 |R_{10}(r)|^2 dr = \frac{\alpha^3}{2} \int_0^R r^2 e^{-\alpha r} dr =$$

$$= \frac{\alpha^3}{2} \left[-e^{-\alpha R} \left(\frac{R^2}{\alpha} + \frac{2R}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3} \right) + \frac{2}{\alpha^3} \right] =$$

$$= 1 - e^{-\alpha R} \left(\frac{\alpha^2 R^2}{2} + \alpha R + 1 \right)$$

Der Kernradius berechnet sich zu $R = 1.44 \cdot \sqrt[3]{A} \cdot 10^{-15} = 8.8 \cdot 10^{-15} m$. Man sieht sehr schnell für alle drei Teilchen:

$$P_{10}(R) = 1$$

Das Teilchen befindet sich immer innerhalb des Kernradius.

5 Termsymbole

- a) Bestimmen Sie unter Beachtung der L-S-Kopplung die Anzahl der möglichen Terme eines angeregten Kohlenstoff-Atoms mit der Elektronenkonfiguration $1s^2 2s^2 2p^3 d$.
 b) Bestimmen Sie den Grundzustand der Atome mit der Elektronenkonfiguration $4d^5 s^2$ (Y) bzw. $4d^2 5s^2$ (Zr) [Die abgeschlossenen Schalen sind nicht angegeben].
 c) Das Manganatom ($Z=25$) hat in seinem Grundzustand eine mit 5 Elektronen gerade zur Hälfte gefüllte Unterschale. Geben Sie die Elektronenkonfiguration und den Grundzustand des Atoms an.

Lösung

- a) Elektronenkonfiguration des angeregten C-Atoms:

$$C : \quad \underbrace{1s^2}_{L_{Rumpf}=S_{Rumpf}=0} \quad \underbrace{2s^2}_{L_{Rumpf}=S_{Rumpf}=0} \quad \underbrace{2p}_{l_1=1; s_1=1/2} \quad \underbrace{3d}_{l_2=2; s_2=1/2}$$

Mögliche L- und S-Werte: $L=1,2,3$; $S=0,1$

Mögliche J-Werte: $J=0,1,2,3,4$

Mögliche Terme: 1P_1 1D_2 1F_3 Singulett $S=0$. $^3P_{0,1,2}$ $^3D_{1,2,3}$ $^3F_{2,3,4}$ Triplett $S=1$

- b) Besetzung aufgrund der Hundschen Regeln ergibt für den Grundzustand bei

$$Y : L = 2; S = 1/2; J = 3/2 \rightarrow ^2D_{3/2}$$

$$Zr : L = 3; S = 1; J = 2 \rightarrow ^3F_2$$

- c) Elektronenkonfiguration des Mn:

$$\text{Mn}: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^5$$

3d:	↑	↑	↑	↑	↑
$m_l =$	-2	-1	0	1	2

$$\text{Grundzustand: } L = 0; S = 5/2; J = 5/2 \rightarrow ^6S_{5/2}$$

6 Natriumspektren in äußerem Magnetfeld

Skizzieren Sie das Aufspaltungsbild der Na-D-Linien (Übergänge $3P \leftrightarrow 3S$) für kein äußeres Magnetfeld sowie für ein schwaches und ein starkes Magnetfeld. Berücksichtigen

Sie dabei nur die L-S-Kopplung. Welche Spektrallinien können Sie beobachten?
Hinweis: Im Na-Atom sind im Gegensatz zum H-Atom das $3^2P_{1/2}$ und das $3^2S_{1/2}$ Niveau nicht entartet.
Hinweis: In erster Näherung kann elektrische Dipolstrahlung keine Spinumkehr bewirken

Lösung

Ohne das äußere Magnetfeld kann man in Natriumspektren zwei Linien beobachten, die

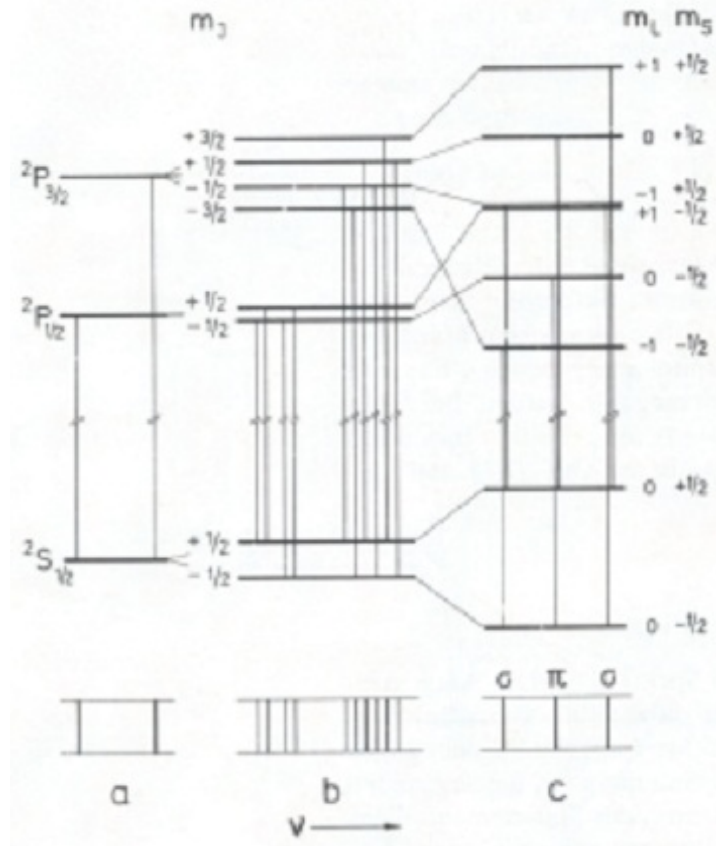


Abbildung 1: Na-D-Linien: D_1 und D_2 Linien des neutralen Natriums ohne Magnetfeld (a); anomaler Zeeman-Effekt (b) und Paschen-Back-Effekt (c).

den Übergängen $3^2P_{1/2} \rightarrow 3^2S_{1/2}$ (D_1 -Linie) und $3^2P_{3/2} \rightarrow 3^2S_{1/2}$ (D_2 -Linie) entsprechen. Das emittierte Licht hat die Wellenlängen $\lambda_1 = 589.592nm$ und $\lambda_2 = 588.995nm$. Die Energieniveaus sind nicht in J entartet, wie bei Wasserstoff. Der Grund dafür liegt in der Coulomb-Wechselwirkung der Elektronen untereinander (Überlapp der 3s-Elektron-Ladungsdichte mit der der Elektronen aus inneren Schalen). Dies bewirkt eine starke Aufspaltung der Energierterme nach der Bahndrehimpulsquantenzahl ΔE_l , die in der Größenordnung der Energiedifferenz ΔE_n liegt. Als Folge kann man bei den Alkaliatomen optische Übergänge schon zwischen Zuständen mit gleicher Hauptquantenzahl beobachten (D_1 und D_2 Linien).

Mit angelegtem äußeren Magnetfeld beobachtet man eine Aufspaltung der Linien (siehe

Abb.)

- **schwaches Magnetfeld:** Entartung in m_j aufgehoben und man beobachtet 4 Linien (6 Linien) anstatt der ursprünglichen D_1 -(D_2)-Linie. Man spricht von anomalem Zeeman-Effekt.

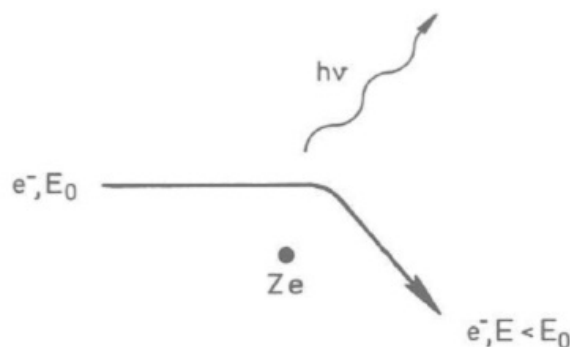
- **starkes Magnetfeld:** die Spin-Bahn-Kopplung wird aufgebrochen, der Gesamtdrehimpuls \vec{J} ist nicht mehr definiert und \vec{S} und \vec{L} präzidieren unabhängig um \vec{B} . Man beobachtet eine unverschobene und zwei verschobene Linien, wie bei normalem Zeeman-Effekt (keine Spinumkehr!!!). Man spricht von Paschen-Back-Effekt.

7 Röntgenstrahlung

1. Ein Strahl Elektronen wird mit der Spannung U beschleunigt und trifft auf eine Wolframplatte. Wie sieht das beobachtete Spektrum (qualitativ) aus. Erklären sie die einzelnen Bestandteile. Berechnen Sie die minimale Wellenlänge.
2. Gibt es einen Konkurrenzprozess zur Emission von Photonen?
3. Nun wird die Wolframplatte mit Röntgenstrahlen durchleuchtet. Beim Durchgang durch Materie wird Strahlung absorbiert und gestreut. Die Intensität nimmt gemäß $I = I_0 \cdot \exp(-\mu x)$ mit zunehmender durchstrahlter Dicke x ab. Skizzieren sie die Wellenlängenabhängigkeit des Absorptionskoeffizienten μ im relevanten Bereich.

Lösung

1. Allgemein: Elektronen ändern ihre Geschwindigkeit beim Durchlauf des Coulombfeldes der positiv geladenen Atomkerne. Nach den Gesetzen der klassischen Elektrodynamik sendet ein geladenes Teilchen elektromagnetische Strahlung aus, wenn es beschleunigt wird.



Das typische Bremspektrum ist kontinuierlich, die Elektronen durchlaufen keine quantisierten oder/und gebundenen Zustände. Um die abgestrahlte Energie verringert sich

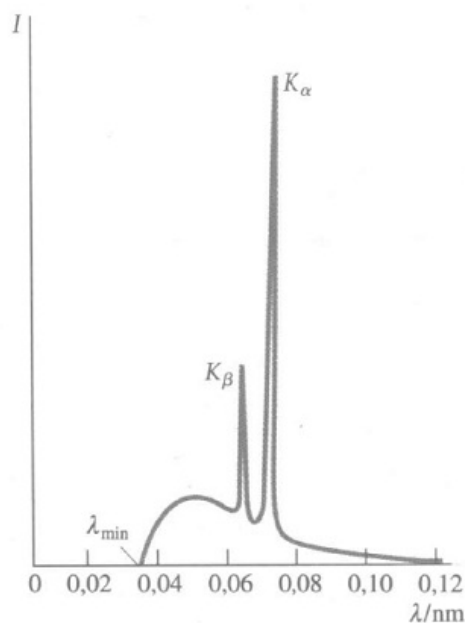
die kinetische Energie des Elektrons. Das Bremsspektrum hat eine minimale Wellenlänge λ_{min} (Abschneidewellenlänge), das ist die gesamte kinetische Energie, die das einfallende Elektron in einem einzigen atomaren Bremsvorgang verlieren kann.

Die maximale kinetische Energie (minimale Wellenlänge) wird durch die Spannung U z.B. der Röntgenröhre bestimmt.

$$E_{kin} = eU = \hbar\omega_{max} = \frac{hc}{\lambda_{min}}$$

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eU}$$

In der Skizze ist ein charakteristisches Röntgenspektrum abgebildet mit den am häufigsten vorkommenden K-Linien.



Diese charakteristischen Linien entstehen durch Innerschalenanregung, d.h. ein Elektron aus den innersten Schalen wird in den nichtgebundenen Kontinuumszustand (Ionisation) herausgelöst. Das entstehende Loch in der inneren Schale kann durch ein Elektron aus der äußersten Schale aufgefüllt werden. Die charakteristische Strahlung für den Übergang ist:

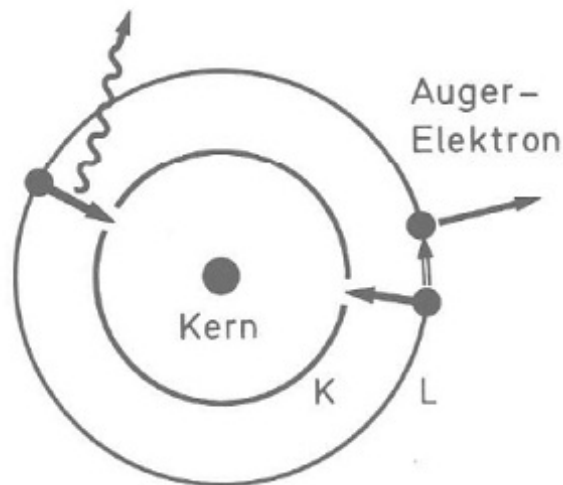
$$\hbar\omega_{ik} = E_i - E_k$$

Diese Strahlung verursacht die Linien im Bremsspektrum.

2.

Ein alternativer Prozess statt Emission eines Röntgenquants ist, dass die frei werdende Energie ein weiteres Elektron aus einer höheren Schale herauslöst. Diese Elektronen

Röntgen-Emission



heissen Auger-Elektronen. Ihre kinetische Energie ist

$$E_{kin} = \hbar\omega_{K\alpha} - E_L = E_K - E_L - E_L = E_K - 2E_L$$

wenn E_L und E_K Bindungsenergien des Elektrons in der L- bzw. K-Schale sind. Die Quantenausbeute η für die Emission ist häufig kleiner als 1.

$$\eta = \frac{\text{Zahl der Röntgenlicht emittierenden Atome}}{\text{Zahl der in K,L .. ionisierten Atome}}$$

Für kleine Ordnungszahlen Z überwiegen die Auger-Elektronen, für große Z die Emission von Röntgenlicht.

3.

Es treten Absorptionskanten auf (Absorptionskoeffizient nimmt sprunghaft zu), sie entsprechen serienbegrenzen der Serien K,L,M,.. ebenso wie die Unterschalen z.B. L_1, L_2, L_3 . Damit Röntgenlicht vom Atom absorbiert wird, muss ein Elektron aus einer inneren Schale in einen weniger stark gebundenen Zustand gehoben werden. Dazu muss aber erst Platz in der benachbarten Schale sein, d.h. eine Ionisation muss vorausgehen. Mit der Absorption ist meistens eine Ionisierung verbunden und Absorptionsspektren sind die überlagerten Serienbegrenz-Kontinua der verschiedenen Schalen bzw. Unterschalen. Sprünge treten auf, wenn die Energie der Röntgenquants gerade reicht zum Absorptionsübergang aus einer neuen Schale in das Grenzkontinuum.

