

FERIENKURS EXPERIMENTALPHYSIK 4 2010

Übung 2 - Musterlösung

1 Kopplung von Drehimpulsen und spektroskopische Notation (*)

Vervollständigen Sie untenstehende Tabelle mit den fehlenden Werten der Quantenzahlen. Darin ist l die Drehimpulsquantenzahl, s die Spinquantenzahl, j die Gesamtdrehimpulsquantenzahl aus der Kopplung von S und L . Ergänzen sie außerdem die Symbole der Niveaus in der spektroskopischen Notation.

l	s	j	m_j	Spekt. Symbol
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$	${}^2P_{1/2}$
		$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2}$	${}^2P_{3/2}$
2	1	2	-2 -1 0 1 2	3D_2
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2}$	${}^2D_{3/2}$

2 Hyperfeinstruktur von Bi 209 (*)

a) Zeigen Sie, dass für den Abstand $\Delta E(F + 1) - \Delta E(F)$ zwischen benachbarten Hyperfeinstrukturturniveaus gilt

$$\Delta E(F + 1) - \Delta E(F) = A \cdot (f + 1) \tag{1}$$

mit der Hyperfeinstrukturkonstanten A und dem Gesamtdrehimpuls F .

Lösung Für die Hyperfeinstrukturaufspaltung gilt

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{HFS}} &= \frac{A}{2} \cdot [f(f+1) - j(j+1) - i(i+1)] \\ \rightarrow \Delta E(F+1) - \Delta E(F) &= \frac{A}{2} \cdot [(f+1)(f+2) - f(f+1)] = \\ &= \frac{A}{2} \cdot [(f+1)(f+2-f)] = \\ &= A \cdot (f+1)\end{aligned}$$

b) Bi 209 besitzt einen angeregten Zustand mit der Konfiguration $^2D_{5/2}$, der in 6 Hyperfeinstrukturkomponenten aufspaltet. Die Abstände zwischen diesen Energieniveaus betragen 0.231 cm^{-1} , 0.312 cm^{-1} , 0.391 cm^{-1} , 0.471 cm^{-1} , 0.551 cm^{-1} . Bestimmen Sie Kernspin I , sowie Hyperfeinstrukturkonstante A mit dem Ergebnis aus Aufgabe a).

Lösung Da es 6 Hyperfeinstrukturkomponenten gibt, muss der Gesamtdrehimpuls F ebenfalls 6 unterschiedliche Werte annehmen können. Deswegen gilt

$$F_{\text{max}} - F_{\text{min}} = 5$$

Aus Aufgabe a) wissen wir, dass gilt

$$\Delta E(F+1) - \Delta E(F) = A \cdot (f+1)$$

Der Abstand der Hyperfeinstrukturkomponenten nimmt also mit steigendem Gesamtdrehimpuls zu. Man kann deshalb die folgende Zuordnung machen:

$$\begin{aligned}\Delta E(F_{\text{min}} + 1) - \Delta E(F_{\text{min}}) &= 0.231 \text{ cm}^{-1} \\ &\dots \\ \Delta E(F_{\text{max}}) - \Delta E(F_{\text{max}} - 1) &= 0.551 \text{ cm}^{-1}\end{aligned}$$

Mit (1) kann man schreiben

$$\begin{aligned}\frac{0.551}{0.231} &= \frac{\Delta E(F_{\text{max}}) - \Delta E(F_{\text{max}} - 1)}{\Delta E(F_{\text{min}} + 1) - \Delta E(F_{\text{min}})} \\ &= \frac{A \cdot f_{\text{max}}}{A \cdot (f_{\text{min}} + 1)} \\ &= \frac{f_{\text{max}}}{(f_{\text{max}} - 4)} \\ \rightarrow f_{\text{max}} &= 6.9 \approx 7\end{aligned}$$

Aus der Angabe folgt $J = \frac{5}{2}$. Maximales F bei der Kopplung von I und J ergibt sich für $I + J$, somit ist

$$I = F_{\text{max}} - J = 7 - \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$$

Die Feinstrukturkonstante errechnet sich dann zu

$$A = 9.8 \cdot 10^{-6} \text{ eV} \equiv 0.079 \text{ cm}^{-1}$$

3 Natrium im schwachen Magnetfeld (**)

Die Wellenlängen der beiden Natrium D-Linien, die den Übergängen zwischen den Niveaus ${}^2P_{1/2}$ und ${}^2S_{1/2}$ (D1-Linie), sowie zwischen ${}^2P_{3/2}$ und ${}^2S_{1/2}$ (D2-Linie) entsprechen, betragen 589.593 nm für die D1-Linie und 588.996 nm für die D2-Linie.

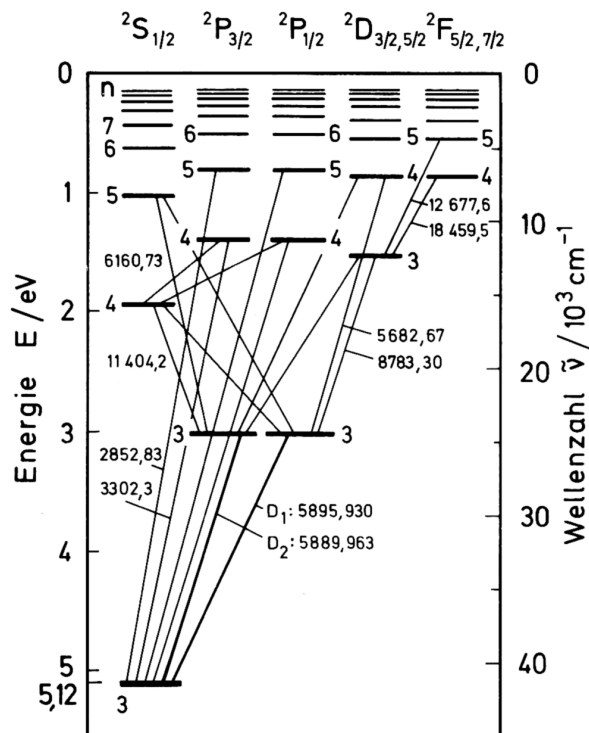


Abbildung 1: Termschema von Natrium.

a) Warum ist in Mehrelektronenatomen die l -Entartung der Zustände aufgehoben?

Lösung Die l -Entartung ist eine Besonderheit des Coulombpotentials und gilt somit nur für $V(r) \propto \frac{1}{r}$. In Mehrelektronenatomen befindet sich das jeweilige Elektron in einem effektiven Potential, das aus der Wechselwirkung mit den anderen Elektronen resultiert. Sehr weit entfernt vom Kern gilt $V(r) \propto \frac{1}{r}$, sehr nahe am Kern ist dagegen $V(r) \propto \frac{Z}{r}$. Das mittlere, effektive Potential ist dann kein Coulombpotential mehr (vgl. Abb. 2).

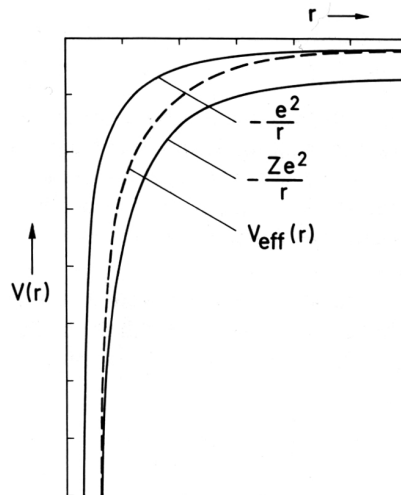


Abbildung 2: Effektives Potential im Mehrelektronenatom.

b) In einem schwachen Magnetfeld spalten die Niveaus auf Grund des anomalen Zeeman-Effekts auf. Berechnen Sie den jeweiligen Landé-Faktor, skizzieren Sie die Aufspaltung und beschriften Sie die einzelnen Unterniveaus mit der entsprechenden Quantenzahl. (Nicht maßstabsgetreu, aber etwaige Unterschiede/Gemeinsamkeiten in der Größe der Aufspaltung sollten qualitativ erkennbar sein.)

Lösung Abbildung 3 zeigt die Aufspaltung der Zustände im schwachen Magnetfeld. Man beachte

- Die Aufspaltung ist für ein gegebenes Ausgangsniveau äquidistant.
- Die Größe der Aufspaltung hängt vom Landé-Faktor ab und beträgt $\Delta E = m_j g_j \mu_B B$

Zustand	g_J
$^23S_{1/2}$	2
$^23P_{1/2}$	2/3
$^23P_{3/2}$	4/3

c) Bei welchem minimalen Magnetfeld würden sich die Zeeman-aufgespaltenen Komponenten der P-Zustände überschneiden, vorausgesetzt, dass die Spin-Bahn-Kopplung erhalten bliebe?

Lösung Der energetische Abstand der P-Zustände beträgt

$$\Delta E = hc \left(\frac{1}{\lambda_{D2}} - \frac{1}{\lambda_{D1}} \right) = 2.13 \text{ meV}$$

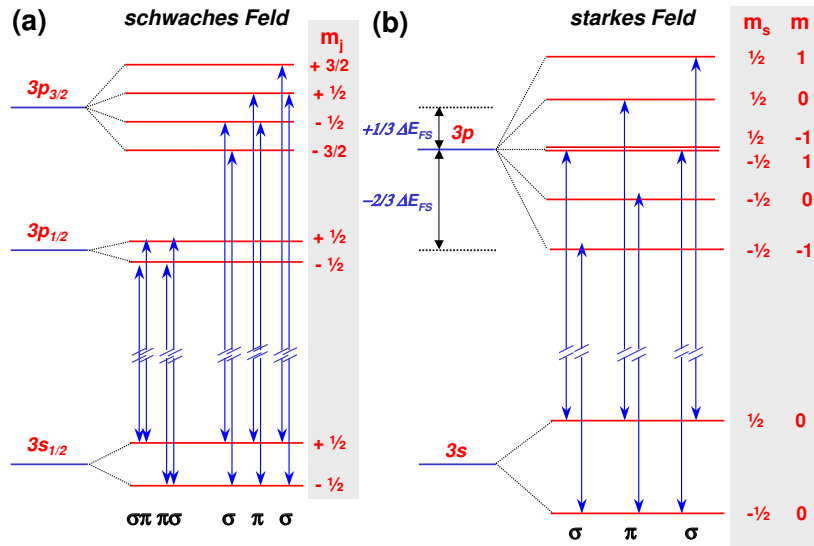


Abbildung 3: a) Aufspaltung der Zustände von Natrium im schwachen Magnetfeld (anomaler Zeeman-Effekt). b) Die Aufspaltung im starken Magnetfeld (Paschen-Back-Effekt). Spin und Bahndrehimpuls entkoppeln und richten sich unabhängig voneinander im Magnetfeld aus

Wenn sich die tiefste bzw. die höchste Linie der beiden P-Zustände überschneiden gilt außerdem

$$\Delta E = \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \right) \mu_B \cdot B$$

$$\rightarrow B = 15.8 \text{ T}$$

Bei dieser Feldstärke erwartet man allerdings, dass die Spin-Bahn-Kopplung aufgebrochen wird und der Paschen-Back-Effekt auftritt.

d) Skizzieren Sie nun die Aufspaltung der Zustände in einem Magnetfeld, das so stark ist, dass die Spin-Bahn-Kopplung aufgebrochen ist und beschriften Sie wiederum die einzelnen Unterniveaus mit der entsprechenden Quantenzahl. (Ebenfalls nicht maßstabsgetreu, aber wieder sollten Unterschiede/Gemeinsamkeiten in der Aufspaltung qualitativ erkennbar sein.)

Lösung Siehe Abb. 3

e) Zeichnen Sie in das Schema aus b) und d) die möglichen optischen Dipolübergänge ein und charakterisieren Sie die Linien an Hand der Polarisierung der emittierten Strahlung. Wie viele unterschiedliche Linien erhält man im Spektrum im schwachen/starken Magnetfeld?

Lösung Zu beachten sind die Auswahlregeln für Dipolübergänge

$$\begin{aligned}\Delta l &= \pm 1 \\ \Delta m_j &= 0, \pm 1 \\ \Delta j &= 0, 1 \quad (j = 0 \not\leftrightarrow j = 0)\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Übergänge, die in Abb. 3 eingezeichnet sind. Für $\Delta m_j = \pm 1$ erhält man zirkular (σ) polarisierte Strahlung und für $\Delta m_j = 0$ linear (π) polarisierte Strahlung. Im schwachen Magnetfeld beobachtet man 10 unterschiedliche Linien im Spektrum, im starken Magnetfeld sind es nur drei.

e) Die Natrium D1-Linie hat eine natürliche Linienbreite von $\delta\nu = 10$ MHz. Wie groß ist die Lebensdauer des ${}^2\text{3P}_{1/2}$ Zustandes?

Lösung Die natürliche Linienbreite $\delta\nu$ wird durch die endliche Lebensdauer τ der Zustände, zwischen denen der Übergang stattfindet, verursacht. Es gilt

$$\delta\nu_{ik} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\tau_i} + \frac{1}{\tau_k} \right) \quad (2)$$

Da jedes Niveau auf Grund seiner endlichen Lebensdauer eine gewisse Energieunschärfe besitzt, tragen in der Regel beide Niveaus zur Linienbreite bei. In diesem Fall erfolgt der Übergang jedoch in den Grundzustand, so dass nur die Unschärfe des ${}^2\text{3P}_{1/2}$ Zustands beachtet werden muss.

$$\begin{aligned}\delta\nu &= \frac{1}{2\pi\tau_{3P}} \\ \rightarrow \tau_{3P} &= 11 \text{ ns}\end{aligned}$$

4 Harmonischer Oszillator (**)

Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator mit der Frequenz ω befinde sich im Grundzustand ψ_0 . Zum Zeitpunkt t_0 ändert sich die Frequenz des Oszillators schlagartig von ω auf $\tilde{\omega}$. Der Übergang erfolgt dabei so schnell, dass das System weiterhin im Zustand ψ_0 verweilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P , dass sich das System für $t > t_0$ bei einer Messung in neuen Grundzustand $\tilde{\psi}_0$ des Oszillators mit $\tilde{\omega}$ befindet?

Die Grundzustandswellenfunktion eines harmonischen Oszillators lautet

$$\phi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2 \right)$$

Verwenden Sie

$$\int_0^{\infty} dx e^{-a^2 x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$$

Lösung Für $t < t_0$ befindet sich das System im Grundzustand ψ_0 eines harmonischen Oszillators mit der Frequenz ω . Für $t > t_0$ ist das System weiterhin im Zustand ψ_0 , der allerdings nun kein Eigenzustand des harmonischen Oszillators mit der Frequenz $\tilde{\omega}$ mehr ist. ψ_0 kann aber als Linearkombination der neuen Eigenzustände mit der Frequenz $\tilde{\omega}$ dargestellt werden.

$$\psi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{\psi}_n$$

Das Betragsquadrat der Entwicklungskoeffizienten $|a_n|^2$ gibt die Wahrscheinlichkeit an das System bei einer Messung im Zustand $\tilde{\psi}_n$ vorzufinden. Wir suchen deshalb den Koeffizienten a_0

$$a_0 = \langle \tilde{\psi}_0 | \psi_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \tilde{\psi}_0^* \psi_0$$

Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} a_0 &= \left(\frac{m^2 \omega \tilde{\omega}}{\pi^2 \hbar^2} \right)^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right) \exp\left(-\frac{m\tilde{\omega}}{2\hbar} x^2\right) = \\ &= \left(\frac{m^2 \omega \tilde{\omega}}{\pi^2 \hbar^2} \right)^{1/4} 2 \int_0^{\infty} dx \exp\left(-\frac{m(\omega + \tilde{\omega})}{2\hbar} x^2\right) = \\ &= \left(\frac{m^2 \omega \tilde{\omega}}{\pi^2 \hbar^2} \right)^{1/4} 2 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\frac{m(\omega + \tilde{\omega})}{2\hbar}}} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\omega + \tilde{\omega}}} \sqrt[4]{\omega \tilde{\omega}} \\ \rightarrow P &= |a_0|^2 = \frac{2}{\omega + \tilde{\omega}} \sqrt{\omega \tilde{\omega}} \end{aligned}$$

5 Kernspintomograph (*)

Das Proton hat, wie auch das Elektron, einen Spin ($I = 1/2$) und damit verbunden auch ein magnetisches Moment. Der in der Medizin heute weit verbreitete Kernspintomograph detektiert mit einem starken Magnetfeld diese nuklearen Dipolmomente im menschlichen Körper. Der Kernspintomograph habe ein Magnetfeld der Flussdichte $B = 5 \text{ T}$. Mit welcher Frequenz muss man einstrahlen, um ein Umklappen des Kernspins herbeizuführen, d.h. Übergänge zwischen den Niveaus Spin-Up und Spin-Down zu induzieren? Nehmen Sie an, dass das Magnetfeld am Kernort durch das äußere Feld bestimmt wird.

Lösung Die Protonen befinden sich in einem starken Magnetfeld. Es handelt sich um den Bereich des Paschen-Back-Effekts. Wir dürfen also die Hyperfeinstruktur getrennt betrachten, da keine Kopplungen vorliegen. Die Aufspaltung zwischen Spin-Up und Spin-Down beträgt

$$\Delta E = g_i \mu_K B$$

Daraus folgt für die Frequenz

$$\begin{aligned} f &= \frac{E}{h} = g_i \frac{\mu_K}{h} B \\ \rightarrow f &= 213 \text{ MHz} \end{aligned}$$