Ferienkurs Analysis 3

Hilberträume und Grundzüge der mathematischen Quantenmechanik

Zensen Carla, Heger Daniel, Kössel Fabian, Ried Tobias

25.März 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Hilbertraum und Skalarprodukt **3**

2 Orthonormalbasen **5**

3 Operatoren **7**

3.1 Beziehungen und Rechenregeln der linearen Operatoren 7

3.1.1 Rechenregeln 7

3.1.2 Inverser Operator 8

3.1.3 Adjungierter Operator 8

3.2 Spezielle Klassen beschränkter Operatoren 8

3.2.1 Orthogonale Projektoren 8

3.2.2 Unitäre Operatoren 9

3.2.3 selbstadjungierte Operatoren 9

1 Hilbertraum und Skalarprodukt

Definition Eine Abbildung $\langle\,.\,,\,.\,\rangle : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ auf einen Vektorraum $\mathscr{H}$ (über $\mathbb{C}$) heißt **Skalarprodukt**, falls für alle $\varphi, \psi_1, \psi_2 \in \mathscr{H}, \lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

i. $\langle \varphi, \varphi \rangle \geqslant 0$ und $\langle \varphi, \varphi \rangle = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$ (positiv definit)

ii. $\langle \varphi, \psi_1 + \lambda\psi_2 \rangle = \langle \varphi, \psi_1 \rangle + \lambda \langle \varphi, \psi_2 \rangle$ (sesquilinear)

iii. $\langle \varphi, \psi \rangle = \overline{\langle \psi, \varphi \rangle}$ (hermitesch)

Der Vektorraum mit dem Skalarprodukt heißt dann **Prähilbertraum**.

Das Skalarprodukt

- ist linear im 2. Faktor
- ist antilinear im 1. Faktor, d.h. $\langle \psi_1 + \lambda\psi_2, \varphi \rangle = \langle \psi_1, \varphi \rangle + \overline{\lambda} \langle \psi_2, \varphi \rangle$

Das ist Konvention; es könnte genausogut andersherum definiert sein!

Beispiel

– $\langle x, y \rangle := \sum\limits_{j=1}^{m} \overline{x_j} y_j, \qquad x, y \in \mathbb{C}^m$: Im Reellen kennen wir das schon aus der Schule:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n \tag{1.1}$$

– $\langle \varphi, \psi \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(x)} \psi(x)\, dx$
ist ein weiteres wichtiges Skalarprodukt.
$\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$

Definition Ein **Hilbertraum** ist ein vollständiger, normierter Raum, dessen Norm $\|.\| = \sqrt{\langle\,.\,,\,.\,\rangle}$ durch ein Skalarprodukt gegeben ist.

Bemerkungen:

- Der $\mathbb{C}^m$ und der $L^2(\mathbb{R})$ sind mit den beiden obigen Skalarprodukten Hilberträume.

- Um zu beweisen, dass ein Raum $\mathscr{H}$ mit einer Funktion F ein Hilbertraum ist, muss man 3 Sachverhalte zeigen:
  - $\mathscr{H}$ ist ein Vektorraum
  - F ist ein Skalarprodukt
  - $\mathscr{H}$ ist abgeschlossen.

  Da das alles viel zu viel Arbeit in der Klausur wäre, ist in der Regel schon ein Teil dieser Sachverhalte schon gegeben. Insbesondere gilt folgendes:
  - Wenn schon gegeben ist, dass F ein Skalarprodukt ist, muss $\mathscr{H}$ ein Vektorraum sein, weil Skalarprodukte nur auf Vektorräumen definiert sind
  - Vollständigkeit (Beweis über Cauchy-Folgen) wurde von Frau Prof Warzel ausgeschlossen.
  - Vektorraumeigenschaften (3 Eigenschaften, wenn bekannst ist, dass der Raum eine abelsche Gruppe bildet; sonst muss man das auch noch beweisen) sind meist sehr kompliziert oder lang zu beweisen und kommen deshalb wahrscheinlich nicht in der Klausur vor.
  - $\Rightarrow$ Wahrscheinlich reduziert sich der Beweis, ob ein Raum ein Hilbertraum ist, auf den Beweis, dass das Skalarprodukt auch wirklich ein Skalarprodukt ist.

2 Orthonormalbasen

Definition Eine Familie $(\varphi_j)_{j\in J}, J \subset \mathbb{N}$, heisst **Orthonormalfolge** (ON-Folge), falls für alle $k, j \in J$ gilt:

$$\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Definition Eine ON-Folge $(\varphi_j)_{j\in J} \subset \mathscr{H}$ heißt **Orthonormalbasis** (ONB), falls für alle $\psi \in \mathscr{H}$

$\psi = \sum\limits_{j\in J} \langle \varphi_j, \psi \rangle \, \varphi_j$,

wobei die Reihe in $\mathscr{H}$ konvergent, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| \psi - \sum\limits_{\substack{j\in J,\\ j\leqslant n}} \langle \varphi_j, \psi \rangle \, \varphi_j \right\| = 0$

Beispiel Orthonormalbasen sind beispielsweise:

- Die Legendre-Polynome $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n]$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, g \rangle = \int\limits_{-1}^{1} f(x) g(x) dx$
- $X_n(\varphi) = \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2\pi}}$ ist für die Funktionen auf dem komplexen Einheitskreis ONB bezüglich des Skalarproduktes $\int_0^{2\pi} d\varphi \overline{f(\varphi)} g(\varphi)$. Auf dem Raum aller Funktionen auf $\mathbb{C}$ bilden die $X_n(\varphi, r)$ jedoch nur noch eine ON-Folge.

Für Beweise sind folgende 2 Aussagen wichtig:

Lemma Sei $(\varphi_j)_{j\in J}$ ON-Folge in $\mathscr{H}$. Dann gilt für alle $\psi \in \mathscr{H}$ und endliche Teilmengen $I \subset J$ die **Besselsche Ungleichung**:

$$\boxed{\|\psi\|^2 := \langle \psi, \psi \rangle \geqslant \sum_{i\in I} |\langle \varphi_i, \psi \rangle|^2}$$

Lemma Für alle $\varphi, \psi \in \mathscr{H}$ gilt die **Cauchy-Schwartzsche Ungleichung**:
$\boxed{|\langle \varphi, \psi \rangle| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|\psi\|}$

Satz **Charakterisierung und Eigenschaften von ONBs**
Sei $(\varphi_j)_{j \in J} \subset \mathscr{H}$, $J \subset \mathbb{N}$ eine ON-Folge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i. $(\varphi_j)_{j \in J}$ ist ONB

ii. Für alle $\psi_1, \psi_2 \in \mathscr{H}$ gilt die **Parsevalsche Gleichung**
$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \sum\limits_{j \in J} \langle \psi_1, \varphi_j \rangle \langle \varphi_j, \psi_2 \rangle$

iii. Für $\psi \in \mathscr{H}$ gilt die **Besselsche Gleichung**: $\|\psi\|^2 := \sum\limits_{j \in J} |\langle \varphi_j, \psi \rangle|^2$

iv. Für alle $\psi \in \mathscr{H}$ gilt:
$\forall j \in J : \langle \varphi_j, \psi \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi = 0$

Bemerkung:
Um zu beweisen, dass eine ON-Folge eine ONB ist,kann man sich zwischen dem Beweis von ii,iii und iv entscheiden; iv ist jedoch meistens am leichtesten zu zeigen!

Definition Ein Hilbertraum heißt **separabel**, falls er eine abzählbare Basis besitzt.

Definition Sei $\mathscr{M} \subset \mathscr{H}$ ein Untervektorraum eines Hilbertraums $\mathscr{H}$. Dann heißt $\mathscr{M}^\perp := \{\psi \in \mathscr{H} | \langle \varphi, \psi \rangle \ = 0 \quad \forall \varphi \in \mathscr{M}\}$ das **orthogonale Komplement** von $\mathscr{M}$.

3 Operatoren

Definition Sei $\mathscr{H}$ Hilbertraum und $\mathscr{D}(A) \subset \mathscr{M}$ Vektorraum. Ein **linearer Operator** (kurz: Operator) A ist eine Abbildung A: $\mathscr{D}(A) \to \mathscr{H}$, welche linear ist, d.h.:
$\forall \varphi, \psi \in \mathscr{D}(A), \lambda \in \mathbb{C} : A(\varphi + \lambda\psi) = A(\phi) + \lambda A(\psi)$.
Man nennt $\mathscr{D}(A)$ den **Definitionsbereich** von A.

(Kurzschreibweise: $A(\psi) = A\psi$)

Definition Ein Operator A: $\mathscr{D}(A) \to \mathscr{H}$ heißt **beschränkt**, falls
$\|A\| := \sup\limits_{\substack{\psi \in \mathscr{D}(A) \\ \|\psi\|=1}} \|A\psi\| < \infty$
$\|A\|$ heißt Operatornorm von A.

3.1 Beziehungen und Rechenregeln der linearen Operatoren

3.1.1 Rechenregeln

Seien A,B Operatoren; $\psi \in \mathscr{H}$ Vektor. Es gelten folgende Rechenregeln:

- $(A + B)\psi := A\psi + B\psi$ (Distributivgesetz)
- $(AB)\psi = A(B\psi)$
  $(A + B)\psi = A + (B\psi)$ (Assoziativität)
- $(A + B)\psi = (B + A)\psi$
  ABER: $\boxed{AB\psi \neq BA\psi}$
  (Kommutativgesetz gilt nur für die Addition; nicht für die Multiplikation!!)

Es gelten also eigendlich sämtliche Rechenregeln, die man sonst auch verwendet bis auf das Kommutativgesetz für die Multiplikation !!! Damit ähneln Operatoren den Matrizen; bei denen auch $AB \neq BA$ gilt. Tatsächlich kann man Operatoren in endlich dimensionalen Hilberträumen auch durch Matrizen darstellen, wie wir noch sehen werden.

Definition Der **Kommutator** von A und B ist definiert als $[A, B] := AB - BA$

3.1.2 Inverser Operator

Definition A^{-1} ist **invers** zu A (oder inverser Operator), falls $A^{-1}A = 1 = AA^{-1}$.

Zusätzliche Rechenregel:

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Bemerkung:
Für dim $\mathscr{H} = \infty$ müssen beide Gleichungen (sowohl $AB = 1$ als auch $BA = 1$) gelten, damit B invers zu A ist.

Beispiel $(\varphi_j)_j \in \mathbb{N}_0$ ist ONB in $\mathscr{H}$
2 Operatoren A,B:

- $A\varphi_j := \varphi_{j+1}$
- $B\varphi_j := \begin{cases} \varphi_{j-1} & j \geqslant 1 \\ 0 & j = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow BA = 1 \neq AB \qquad (AB\varphi_j = 0 \text{ für } \varphi_j = \varphi_0)$

3.1.3 Adjungierter Operator

Definition Der **Adjungierte Operator** $A^\dagger$ zu A ist durch $\langle \varphi, A\psi \rangle = \langle A^\dagger \varphi, \psi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in \mathscr{H}$ definiert.

Zusätzliche Rechenregeln:

- $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$
- $(A + \lambda B)^\dagger = A^\dagger + \overline{\lambda} B^\dagger$

3.2 Spezielle Klassen beschränkter Operatoren

3.2.1 Orthogonale Projektoren

Definition $P : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ heißt **orthogonaler Projektor**

i. $P^\dagger = P$

ii. $P^2 = P$

Bemerkungen:

- P projeziert auf einen abgeschlossenen Teilraum des Hilbertraums (der **Bildraum** des Projektors), der selbst wieder ein Hilbertraum ist.

- Auch $1 - P$ ist ein orthogonaler Projektor. Er projiziert auf den Teil von $\mathscr{H}$, auf den P nicht projiziert. (also das auf orthogonale Komplement $(P\mathscr{H})^{\perp}$)

3.2.2 Unitäre Operatoren

Definition $U : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ ist **unitär**, falls $U^{\dagger} = U^{-1}$.

Beispiel Unitär sind beispielsweise:

- Der Translationsoperator $T_a : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$
- Fouriertrafo $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$
- Multiplikationsoperator der Form e^{iV} mit $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

3.2.3 selbstadjungierte Operatoren

Definition $A : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ ist **selbstadjungiert**, falls $A^{\dagger} = A$.

Beispiellemma:

Lemma $A = A^{\dagger} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \psi \in \mathscr{H} : \langle \psi, A\psi \rangle \in \mathbb{R}$

Beweis:
" $\Rightarrow$ " : Übung

" $\Leftarrow$ " :
$\left\langle A^{\dagger}\psi, \psi \right\rangle \underset{\substack{Definition \\ adjungiert}}{=} \langle \psi, A\psi \rangle \underset{\in \mathbb{R}}{=} \overline{\langle \psi, A\psi \rangle} \underset{hermitesch}{=} \langle A\psi, \psi \rangle$
$\Rightarrow A = A^{\dagger}$

Beispiel Aufgabe 7 aus der Klausur:
Operatoren auf Hilberträumen
Sei $T_{\lambda} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ der durch

$$(T_{\lambda}\psi)(x) := \lambda^{\frac{n}{2}} \psi(\lambda x)$$

definierte Operator, wobei $\lambda > 0$ ist.

i. **Bestimmen sie den adjungierten Operator:**
Zuerst müssen wir überlegen, welches Skalarprodukt auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt: $\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(x)} \psi(x) dx^n$.

$$\langle \varphi, T_\lambda \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(x)} T_\lambda \psi(x) dx^n = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(x)} \lambda^{\frac{n}{2}} \psi(\lambda x) dx^n \underset{\substack{y=\lambda x \\ dx^n = \frac{1}{\lambda^n} dy^n}}{=}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(\tfrac{1}{\lambda} y)} \lambda^{\frac{n}{2}} \psi(y) \tfrac{1}{\lambda^n} dy^n = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\left(\tfrac{1}{\lambda}\right)^{\frac{n}{2}} \varphi(\tfrac{1}{\lambda} y)} \psi(y) dy^n = \left\langle T_{\frac{1}{\lambda}} \varphi, \psi \right\rangle$$

$\Rightarrow T_\lambda^\dagger = T_{\frac{1}{\lambda}}$

ii. T_λ **ist für alle** $\lambda \neq 1$
☐ selbstadjungiert ☐ eine Orthonormalbasis ☐ positiv
☐ ein orthogonaler Projektor ■ unitär
Um zu wissen, dass T_λ unitär ist, muss man das Inverse von T_λ berechnen:
$\psi(x) = T_\lambda^{-1} T_\lambda \psi(x) = T_\alpha T_\lambda \psi(x) = \alpha^{\frac{n}{2}} \lambda^{\frac{n}{2}} \psi(\alpha \lambda x)$
$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad T_\lambda^{-1} = T_{\frac{1}{\lambda}}$

iii. **Zeigen Sie, dass aus** $AB = 0$ **auch** $BA = 0$ **folgt:**
$AB = 0 = 0^\dagger = (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger = BA$