Matthias Eibl

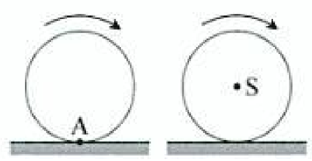
Ferienkurs Theoretische Mechanik 2009

Starre Körper und Rotation - Lösungen

Aufgaben für Donnerstag

1 Kinetische Energie eines rollenden Zylinders

Berechnen Sie für zwei verschiedenen körperfeste Koordinatenürsprünge die kinetische Energie eines Zylinders, der ohne Schlupf auf einer horizontalen Geraden rollt:



- Der Koordinatenursprung liegt momentan im Kontaktpunkt A.
- Der Koordinatenursprung liegt ständig im Schwerpunkt S des Zylinders.

Die Winkelgeschwindigkeit ist in beiden Fällen gleich groß. Drücke die Energie in Abhängigkeit vom Trähеitsmoment um die Symmetrieachse I_S, der Masse m, dem Radius R und der Winkelgeschwindikeit ω aus. Der Steinersche Satz ist in diesem Problem einfach: $I' = I_S + ms^2$ wobei s den Abstand der Drehachse zur Symmetrieachse darstellt.

Lösung

Im ersten Fall führt der Zylinder eine reine Drehung um den Punkt A aus. Die Translationsenergie ist Null. Die Drehachse durch A ist parallel zur Symmetrieachse des Zylinders. Mit Hilfe des Steinerschen Satz ergibt sich die Energie zu:

$$T = \frac{I_A}{2}\omega^2 = \frac{I_S + mr^2}{2}\omega^2 = \frac{I_S}{2}\omega^2 + \frac{m}{2}(\omega r)^2$$

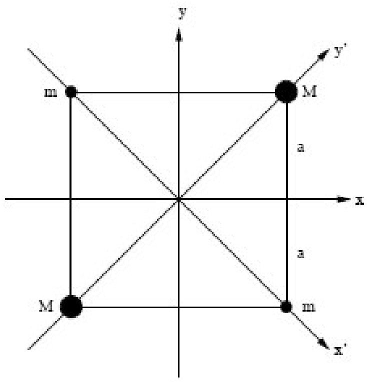
Im zweiten Fall bewegt sich der Schwerpunkt mit der Geschwindigkeit $v_S = \omega r$. Daraus ergibt sich die Translationsenergie, zu der die Rotationsenergie addiert wird. Für die gesamte kinetische Energie ergibt sich:

$$T = T_{trans} + T_{rot} = \frac{m}{2}v_S^2 + \frac{I_S}{2}\omega^2 = \frac{I_S}{2}\omega^2 + \frac{m}{2}(\omega r)^2$$

Beide Zylinder haben also die gleiche kinetische Energie.

2 Trägheitstensor I

An den Ecken eines Quadrates der Kantenlänge $2a$ befinden sich punktförmige Körper der Massen M und m wie aus nebenstehender Abbildung ersichtlich. Die z- und z'-Achsen sind identisch und zeigen auf den Betrachter.



1. Berechnen Sie den Trägheitstensor I bezüglich der als x, y, z gekennzeichneten Achsen.
2. Berechnen Sie den Trägheitstensor I' bezüglich der als x', y', z' gekennzeichneten Achsen. (Hinweis: Der Trägheitstensor I kann mit einer geeigneten Transformation auf die gewünschte Form gebracht werden. Was ist das für eine Transformation? Die genaue Form muss man nicht wissen, sie kann beim Tutor erfragt werden.)
3. Finden Sie durch Diagonalisieren von I die Hauptträgheitsmomente.
4. Ist eine Diagonalisierung für beliebige Massenanordnungen immer möglich?

Lösung

1. Zuerst stellen wir die Massendichte für das Quadrat auf:

$$\rho(\vec{r}) = \Big(M\big(\delta(x-a)\delta(y-a) + \delta(x+a)\delta(y+a)\big) + m\big(\delta(x+a)\delta(y-a) + \delta(x-a)\delta(y+a)\big)\Big)\delta(z)$$

Diese können wir dann in unsere Formel für den Trägheitstensor einstetzen:

$$I_{ij} = \int d^3r\rho(\vec{r})[r^2\delta_{ij} - x_i x_j]$$

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \int d^3r\rho(\vec{r})[y^2 + z^2] = \\
&= \int dx \int dy\, y^2 \Big(M\big(\delta(x-a)\delta(y-a) + \delta(x+a)\delta(y+a)\big) + m\big(\delta(x+a)\delta(y-a) + \delta(x-a)\delta(y+a)\big)\Big) \\
&= Ma^2 + Ma^2 + ma^2 + ma^2 = 2(M+m)a^2 \\
I_{22} &= \int d^3r\rho(\vec{r})[x^2 + z^2] = Ma^2 + Ma^2 + ma^2 + ma^2 = 2(M+m)a^2 \\
I_{33} &= \int d^3r\rho(\vec{r})[x^2 + y^2] = 4(M+m)a^2 \\
I_{12} &= I_{21} = \int d^3r\rho(\vec{r})[-xy] = -(Ma^2 + Ma^2 - ma^2 - ma^2) = -2(M-m)a^2 \\
I_{13} &= I_{31} = I_{23} = I_{32} \propto \int d^3r\, \delta(z)\, z = 0
\end{aligned}$$

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{21} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \tilde{I} & 0 \\ \tilde{I} & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{pmatrix}, \text{ mit } \begin{cases} I = 2a^2(M+m) \\ \tilde{I} = -2a^2(M-m) \end{cases}$$

2. Die Transformation ist eine Drehung um $-\pi/4$. Der Trägheitstensor im gedrehten Koordinatensystem ergibt sich somit aus folgender Transformation:

$$I' = S^T I S$$

Wobei S die Drehmatrix

$$S = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad S^{-1} = S^T$$

ist.
Für den gedrehten Trägheitstensor erhalten wir also:

$$I' = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & \tilde{I} & 0 \\ \tilde{I} & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I+\tilde{I} & \tilde{I}-I & 0 \\ \tilde{I}+I & I-\tilde{I} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2}I \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} I+\tilde{I} & 0 & 0 \\ 0 & I-\tilde{I} & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a^2m & 0 & 0 \\ 0 & 4a^2M & 0 \\ 0 & 0 & 4a^2(M+m) \end{pmatrix}$$

Dies ist bereits die Diagonalform des Trägheitstensors I. Das zugehörige Koordinatensystem ist auch bekannt. Die nächste Aufgabe wäre somit bereits gelöst. Wir wollen aber das Diagonalisieren üben und unsere Rechnungen überprüfen.

3. Dazu Diagonalisieren wir den Trägheitstensor I, d.h. wir führen die Hauptachsentransformation durch.

$$I = \begin{pmatrix} I & \tilde{I} & 0 \\ \tilde{I} & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte von I ergeben sich aus dem Charakteristischem Polynom:

$$0 = \det(I-\lambda\mathbb{1}) = \det\begin{pmatrix} I-\lambda & \tilde{I} & 0 \\ \tilde{I} & I-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2I-\lambda \end{pmatrix} = \big(2I-\lambda\big)\big((I-\lambda)^2-\tilde{I}^2\big) = (2I-\lambda)(I+\tilde{I}-\lambda)(I-\tilde{I}-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = I+\tilde{I}, \quad \lambda_2 = I-\tilde{I}, \quad \lambda_3 = 2I$$

Diese drei Eigenwerte sind im Hauptachsensystem die Diagonalelemente des Trägheitstensors I':

$$I' = \begin{pmatrix} I+\tilde{I} & \tilde{I}-I & 0 \\ \tilde{I}+I & I-\tilde{I} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2}I \end{pmatrix} = = \begin{pmatrix} I+\tilde{I} & 0 & 0 \\ 0 & I-\tilde{I} & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{pmatrix}$$

Dieser entspricht gerade dem oben durch Drehung berechneten Trägheitstensor.
Über die Eigenwerte könnten wir nun die Eigenvektoren berechen, indem wir sie in folgendes Eigenwertproblem einsetzen:

$$I\vec{v_i} = \lambda_i \vec{v_i}$$

Da wir bereits gezeigt haben, dass der Trägheitstensor I' aus einer Rotation von I entsteht, können wir sie aber gleich hinschreiben. Sie sind nämlich die Spaltenvektoren der Transformationsmatrix S (vgl. LA2).

$$v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Die Eigenvektoren sitzen auf den Hauptträgheitsachsen. In diesem System weißt die Massenanordnung größte Symmetrie auf.

4. Der Trägheitstensor ist als symmetrische Matrix definiert. Solche Matrizen können immer diagonalisiert werden. In unserem speziellen Fall ist der Trägheitstensor reell. Daraus folgt, dass es immer möglich ist, den Trägheitstensor durch geeignete Drehung auf Diagonalform zu bringen.

3 Trägheitstensor II

Berechnen Sie den Träheitstensor für Drehungen um den Schwerpunkt von:

1. einem Quader mit Seitenlängen a, b, c
2. einem Zylinder mit Höhe h und Radius r
3. einer homogenen Kugel mit Radius r ($\int_0^\pi \sin^3 \varphi d\varphi = \frac{4}{3}$)

Wählen Sie für die Berechnungen günstige Koordinatensysteme.

Lösung

1. Sei $\rho = m/(abc)$ die Dichte des Quaders, dann gilt in kartesischen Koordinaten:

$$I_{11} = \rho \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz(y^2 + z^2) = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$$

und analog

$$I_{22} = \frac{m}{12}(a^2 + c^2) \qquad I_{33} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$$

Dies sind die Hauptträgheitsmomente.

2. Mit der Dichte $\rho = m/(\pi r^2 h)$ ergibt sich für den Zylinder in Zylinderkoordinaten:

$$I_{33} = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \int_0^r dr' r'(x^2 + y^2) = \rho 2\pi h \int_0^r dr' r'^2 = \frac{m}{2} r^2$$

Das Trägheitsmoment für eine zur Symmetrieachse senkrechte Schwerpunktachse ergibt sich zu:

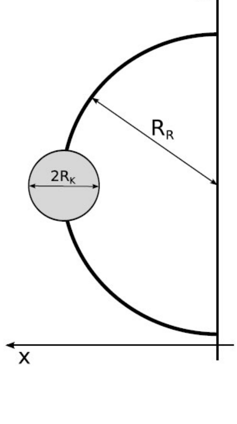
$$I_{11} = I_{22} = \rho \int_0^r dr' r' \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-h/2}^{h/2} dz(r'^2 \sin^2 \varphi + z^2) = m\Big(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12}\Big)$$

3. Für die Kugel ergeben sich in Kugelkoordinaten und der Dichte $\rho = 3m/4\pi r^3$ die Hauptträgheitsmomente zu:

$$I_{11} = I_{22} = I_{33} = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta \int_0^r r'^2 dr' \sin^2 \vartheta r'^2 = \frac{2}{5} m r^2$$

4 Trägheitstensor III

Ein Ring mit Radius R, auf dem eine Kugel mit Radius r angebracht ist, rotiert um die z-Achse. Der Ring selbst besteht aus einem Draht mit der Längendichte λ. Die (homogene) Kugel hat die Masse m_K. Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Gesamtsystems.
Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:



- Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Kugel.
- Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Rings mithilfe eines Linienintegrals.
- Geben Sie einen Ausdruck für das gesamte Trägheitsmoment an.

Lösung

Das Trägheitsmoment der Kugel haben wir bereits in der vorigen Aufgabe berechnet. Es lautet:

$$I_K = \frac{2}{5} m_K r^2$$

Das Träheitsmoment des Ringes berechnen wir über folgendes Integral:

$$I_R = \int_R ds \lambda x^2$$

x enspricht dem Abstand zur Rotationsachse und das Wegelemt ds verläuft auf dem Ring. Wir müssen jetzt einen Zusammenhang dieser beiden Größen herstellen. Dazu parametrisieren wir den Weg s entlang des Ringes über den den Polarwinkel ϑ.

$$\gamma = (R\cos\vartheta, R\sin\vartheta)^T$$

Mit der Gleichung für Wegintegrale

$$\int_\gamma f\, ds := \int_a^b f(\gamma(t))\, \|\dot{\gamma}(t)\|_2\, dt \qquad\qquad \|\dot{\gamma}(\vartheta)\|_2 = \sqrt{R^2\sin^2\vartheta + R^2\cos\vartheta} = R$$

ergibt sich damit für das Trägheitsmoment:

$$I_R = \int_R ds\lambda x^2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2\cos^2\vartheta\, R\,\lambda\, d\vartheta = \frac{\lambda}{2}\pi R^3 = \frac{m_R}{2}R^2$$

Für das gesamte Trägheitsmoment muss das Trägheitsmoment der Kugel noch mit dem Steinerschen Satz angepasst werden. Das Ergebnis lautet:

$$I_{ges} = I_R + I_K + m_K R^2$$

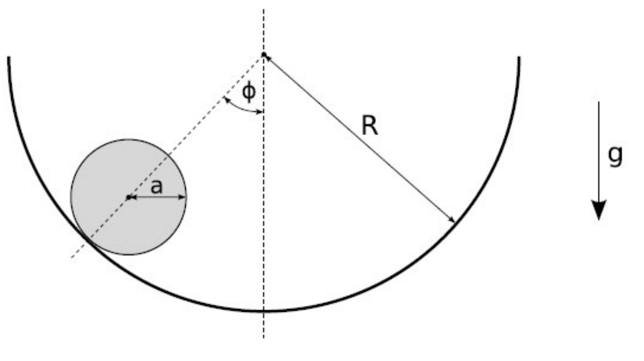
5 Rollender Zylinder in einem Zylinder

Ein homogener Zylinder mit der Masse M und dem Radius a rollt, ohne zu gleiten und unter dem Einfluss der Erdanziehungskraft, auf einer festen Zylinderoberfläche mit dem Radius R.

- Geben Sie die Lagrange-Funktion in Abhängigkeit von ϕ und $\dot{\phi}$ an und berechnen Sie daraus die Bewegungsgleichung.
- Lösen Sie die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen um die Gleichgewichtslage und zeigen Sie, dass man eine Schwingung mit der Frequenz

  $$\omega = \sqrt{\frac{2g}{3(R-a)}}$$

  erhält.



Lösung

Um die Lagrange Funktion aufstellen zu können, müssen wir die kinetische Energie über *phi* und $\dot{\phi}$ ausdrücken.
Der Schwerpunkt des rollenden Zylinders bewegt sich wie folgt:

$$s = (R-a)\phi \qquad \Rightarrow v = (R-a)\dot{\phi}$$

Über die Rollbedingung $s = a\varphi$, φ ist der Rotationswinkel im kleinen Zylinder, erhalten wir nach einmaligem Ableiten ebenfalls die Schwerpunktsgeschwindigkeit. Wir setzen beide Gleichungen gleich und erhalten somit die Rotationsgeschwindikeit ω des kleinen Zylinders in Abhänigkeit von $\dot{\phi}$:

$$s = a\varphi \qquad \Rightarrow\ v = a\dot{\varphi} = a\omega\ =\ (R-a)\dot{\phi} \qquad \Rightarrow\ \omega = \frac{R-a}{a}\dot{\phi}$$

Um die Rotationsenergie berechnen zu können, benötigen wir das Trägheitsmoment eines Zylinder bei Drehung um die Symmetrieachse. Dieses haben wir bereits berechnet. Es lautet in unserem Fall: $I = \frac{M}{2}a^2$. Damit erhalten wir für die gesamte kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T = T_{rot} + T_{trans} &= \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{4}Ma^2\omega^2 + \frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 = \\ &= \frac{1}{4}Ma^2\frac{(R-a)^2}{a^2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 = \\ &= \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 \end{aligned}$$

Nun benötigen wir noch die potenielle Energie:

$$U = Mgh = Mg\big((R-a) - (R-a)\cos\phi\big) = -Mg(R-a)\cos\phi + const$$

Der konstante Term braucht uns nicht weiter zu interessieren, diese in der Lagrange Funktion nicht auftauchen:

$$L = T - U = \frac{3}{4}M(R-a)^2\dot{\phi}^2 + Mg(R-a)\cos\phi$$

Damit erhalten wir aus der Euler-Lagrange-Gleichung die Bewegungsgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial\phi} \qquad \Rightarrow\ \frac{3}{2}M(R-a)^2\ddot{\phi} + Mg(R-a)\sin\phi = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ddot{\phi} + \frac{2}{3}\frac{g}{R-a}\sin\phi = 0$$

Für kleine Auslenkung dürfen wir die Sinusfunktion durch ihr Argument nähern: $\sin\phi \approx \phi$
Damit können wir die Bewegungsgleichung umschreiben und lösen:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + \frac{2}{3}\frac{g}{R-a}\phi &= 0 \\ \Rightarrow \phi(t) = \phi_0\cos(\omega t + \vartheta_0) \qquad \text{mit } \omega &= \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{R-a}} \end{aligned}$$

Die maximale Auslenkung ϕ_0 und die Anfangsphase ϑ_0 ergeben sich dabei aus möglichen Anfangsbedingungen.