

Ferienkurs Theoretische Mechanik 2009

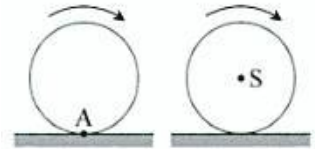
Newtonsche Mechanik, Keplerproblem - Lösungen

Aufgaben für Donnerstag

1 Kinetische Energie eines rollenden Zylinders

Berechnen Sie für zwei verschiedenen körperfeste Koordinatenursprünge die kinetische Energie eines Zylinders, der ohne Schlupf auf einer horizontalen Geraden rollt:

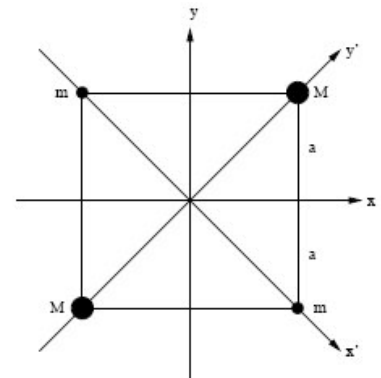
- Der Koordinatenursprung liegt momentan im Kontaktpunkt A.
- Der Koordinatenursprung liegt ständig im Schwerpunkt S des Zylinders.



Die Winkelgeschwindigkeit ist in beiden Fällen gleich groß. Drücke die Energie in Abhängigkeit vom Trägheitsmoment um die Symmetrieachse I_S , der Masse m , dem Radius R und der Winkelgeschwindigkeit ω aus. Der Steinersche Satz ist in diesem Problem einfach: $I' = I_S + ms^2$ wobei s den Abstand der Drehachse zur Symmetrieachse darstellt.

2 Trägheitstensor I

An den Ecken eines Quadrates der Kantenlänge $2a$ befinden sich punktförmige Körper der Massen M und m wie aus nebenstehender Abbildung ersichtlich. Die z - und z' -Achsen sind identisch und zeigen auf den Betrachter.



1. Berechnen Sie den Trägheitstensor I bezüglich der als x, y, z gekennzeichneten Achsen.
2. Berechnen Sie den Trägheitstensor I' bezüglich der als x', y', z' gekennzeichneten Achsen. (Hinweis: Der Trägheitstensor I kann mit einer geeigneten Transformation auf die gewünschte Form gebracht werden. Was ist das für eine Transformation? Die genaue Form muss man nicht wissen, sie kann beim Tutor erfragt werden.)
3. Finden Sie durch Diagonalisieren von I die Hauptträgheitsmomente.
4. Ist eine Diagonalisierung für beliebige Massenarrangements immer möglich?

3 Trägheitstensor II

Berechnen Sie den Trägheitstensor für Drehungen um den Schwerpunkt von:

1. einem Quader mit Seitenlängen a, b, c
2. einem Zylinder mit Höhe h und Radius r
3. einer homogenen Kugel mit Radius r ($\int_0^\pi \sin^3 \varphi d\varphi = \frac{5}{3}$)

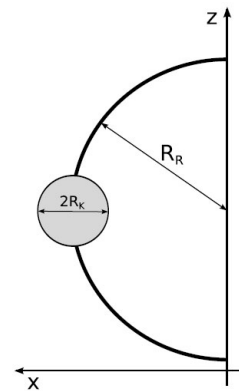
Wählen Sie für die Berechnungen günstige Koordinatensysteme.

4 Trägheitstensor III

Ein Ring mit Radius R , auf dem eine Kugel mit Radius r angebracht ist, rotiert um die z -Achse. Der Ring selbst besteht aus einem Draht mit der Längendichte λ . Die (homogene) Kugel hat die Masse m_K . Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Gesamtsystems.

Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

- Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Kugel.
- Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Rings mithilfe eines Linienintegrals.
- Geben Sie einen Ausdruck für das gesamte Trägheitsmoment an.



5 Rollender Zylinder in einem Zylinder

Ein homogener Zylinder mit der Masse M und dem Radius a rollt, ohne zu gleiten und unter dem Einfluss der Erdanziehungskraft, auf einer festen Zylinderoberfläche mit dem Radius R .

- Geben Sie die Lagrange-Funktion in Abhängigkeit von ϕ und $\dot{\phi}$ an und berechnen Sie daraus die Bewegungsgleichung.
- Lösen Sie die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen um die Gleichgewichtslage und zeigen Sie, dass man eine Schwingung mit der Frequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{3(R-a)}}$$

erhält.

