

Übungen zur Lagrangeschen Mechanik und den Starren Körpern

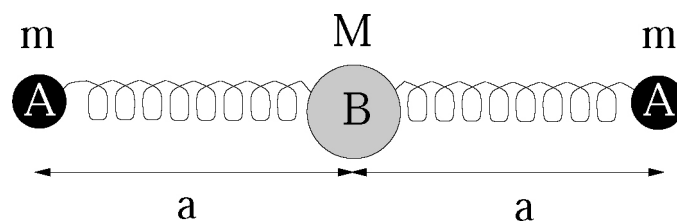
Ari Wugalter

23. September 2009

1 Lineares dreiatomiges Molekül

Zwei Atome A der Masse m und ein Atom B der Masse M bilden ein lineares dreiatomiges Molekül ABA. Die potentielle Energie des Moleküls hänge quadratisch von den Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage ab. Es wird angenommen, dass sich die Atome nur längs der Molekülachse bewegen können (longitudinale Schwingungen).

- Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.
- Berechnen Sie die Eigenfrequenzen und Normalschwingungen. Beschreiben Sie die Bewegungsformen, die das Molekül ausführen kann.



2 Trägheitstensoren

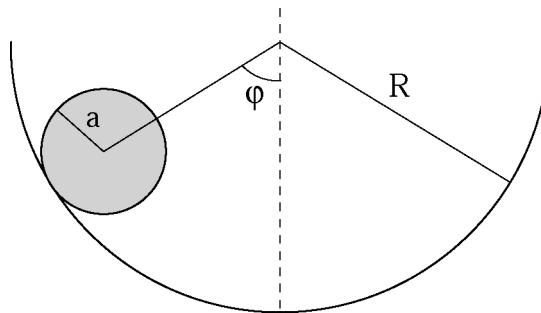
Berechnen Sie die Trägheitstensoren im Schwerpunkt im HTA-System.

- Von einem Molekül aus vier gleichen Atomen der Masse m , die an den Ecken eines Quadrats der Kantenlänge a liegen.
- Von einer dünnen homogenen Stiftmine der Länge l und Masse m .
- Von einer CD (Masse m) mit Innenradius (Loch) r_i und Außenradius r_a .
- Von einem Vollzylinder der Höhe h und Radius R .

3 Zylinder in Kugelschale

Betrachten Sie einen Hohlzylinder mit Masse M und Radius a , der auf der Innenseite eines fixierten Hohlzylinders mit Innenradius R ohne zu gleiten abrollt.

- Bestimmen Sie das Trägheitsmoment des Zylinders bzgl. seiner Symmetrieachse.
- Stellen Sie die Lagrangefunktion und die Euler-Lagrange Gleichung in Abhängigkeit von bzw. für ϕ auf.



4 Hulla-Hupp-Reifen

Ein Hulla-Hupp-Reifen ist ein homogener Ring mit Radius R , Masse M und vernachlässigbarer Dicke. Er ist an einem festen Punkt seines Umfangs im homogenen Schwerfeld der Erde im Koordinatenursprung aufgehängt. Zunächst soll er frei in jede Richtung schwingen können. Die Schwerkraft wirkt antiparallel zur z -Achse. Es wirken keine weiteren Kräfte.

- Berechnen Sie den Trägheitstensor des Rings bezüglich des Aufhängepunkts.
- Geben Sie die kontinuierlichen Symmetrien des Systems und die dazugehörigen Erhaltungsgrößen an.

Wir betrachten nunmehr den Fall, dass der Reifen nur in der xz -Ebene schwingen kann.

- Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und lösen Sie diese für kleine Auslenkungen mit den Anfangsbedingungen $\phi(0) = \phi_0$, $\dot{\phi}(0) = 0$.

5 Halbkugel auf Ebene

Gegeben ist eine Halbkugel der Masse M mit Radius R und homogener Massenverteilung. Der Schwerpunkt liegt auf der Symmetrie im Abstand $\sigma = \frac{3}{8}R$ zum Ursprung (Mittelpunkt der Grundfläche).

- Berechnen Sie das Trägheitstmoment einer Achse durch den Schwerpunkt, die senkrecht zur Symmetrieachse steht.
- Die Halbkugel liegt nun mit der runden Seite auf einer Ebene. Die Halbkugel wird um einen Winkel ϕ aus der Ruhelage ausgelenkt und danach losgelassen, wobei wir annehmen, dass sie auf der Ebene abrollt (es wirkt die Gewichtskraft). Der (veränderliche) Auflagepunkt A der Halbkugel auf der Ebene bestimmt dann die momentane Rotationsachse (in der Skizze senkrecht zur Zeichenebene). Berechnen Sie das Trägheitsmoment I_A bezüglich der Rotation um diese Achse.

Bemerkung: Das Trägheitsmoment hängt von ϕ ab, da der Abstand d zwischen Auflagepunkt A und Schwerpunkt S vom Winkel ϕ abhängt.

- Stellen Sie Lagrange-Funktion und Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen auf. Welche Bewegung führt die Halbkugel durch?

