

Aufgaben zur Experimentalphysik II: Thermodynamik

Musterlösung

William Hefter - 11/09/2009

1.

1. Durchmesser der Stahlstange nach ΔT : $D_s = D_{s0}(1 + \alpha_{Stahl}\Delta T)$
Durchmesser der Bohrung im Ring nach ΔT : $D_m = D_{m0}(1 + \alpha_{Messing}\Delta T)$

$$D_s = D_m \Rightarrow \Delta T = \frac{D_{s0} - D_{m0}}{\alpha_m D_{m0} - \alpha_s D_{s0}} = 335^\circ\text{C} \Rightarrow T = 25^\circ\text{C} + 335^\circ\text{C} = 360^\circ\text{C}$$

2. Benötigte Wärme: $\Delta Q = mc_w(100^\circ\text{C} - 15^\circ\text{C}) = mc_w 85\text{K}$
Leistung durch Schütteln: $P = Ef = mghf$, wobei $f = 0,5\text{Hz}$

$$t = \frac{\Delta Q}{P} = \frac{c_w 85\text{K}}{ghf} = 2,42 \cdot 10^5 \text{s} = 2,8 \text{Tage}$$

3. Es gibt drei Möglichkeiten: **a)** Das Eis erreicht gerade den Schmelzpunkt und schmilzt nicht. **b)** Ein Teil des Eis schmilzt und es stellt sich eine Temperatur von 0°C ein **c)** Das ganze Eis schmilzt und es stellt sich eine Temperatur oberhalb von 0°C ein.

- a) Wärme, die dem Eis zugeführt wird: $|\Delta Q_{Eis}| = m_e c_e (T_{End} - T_{Eis})$
Wärme, die dem Wasser entzogen wird: $|\Delta Q_w| = -m_w c_w (T_{End} - T_w)$

$$|\Delta Q_{Eis}| = |\Delta Q_w| \Rightarrow T_{End} = \frac{m_e c_e T_{Eis} + m_w c_w T_w}{m_e c_e + m_w c_w} = 16,6^\circ\text{C}$$

Liegt über dem Schmelzpunkt von Eis; also muss mindestens ein Teil vom Eis geschmolzen sein, die Rechnung berücksichtigt das nicht und ist falsch.

- b) Ein Teil des Eises schmilzt: $m < m_e$

$|\Delta Q_{Eis}| = m_e c_e (0^\circ\text{C} - T_{Eis}) + mL_w$, mit L_w : Latente Schmelzwärme von Wasser

$|\Delta Q_w| = -m_w c_w (0^\circ\text{C} - T_w) = m_w c_w T_w$

$$|\Delta Q_{Eis}| = |\Delta Q_w| \Rightarrow m = \frac{c_w m_w T_w + c_e m_e T_{Eis}}{L_w} = 53\text{g}$$

Also: Es ist genug Eis vorhanden, um das Wasser auf 0°C runterzukühlen, aber nicht gefrieren zu lassen, da nur ein Teil des Eises schmilzt. Das ist die gesuchte Lösung.

- c) Dieser Fall tritt ein, wenn nur ein Eiswürfel verwendet wird: Es sind weniger als 53g Eis vorhanden, also schmilzt das ganze Eis und das Gemisch erreicht eine Temperatur oberhalb von 0°C .

$|\Delta Q_w| = -m_w c_w (T_{End} - T_w)$

$|\Delta Q_{Eis}| = c_e m_e (0 - T_{Eis}) + c_w m_e (T_{end} - 0) + m_e L_w$

$$|\Delta Q_w| = |\Delta Q_{Eis}| \Rightarrow T_f = \frac{c_w m_w T_w + c_e m_e T_{Eis} - m_e L_w}{c_w (m_w + m_e)} = 2,5^\circ\text{C}$$

4. Im Gleichgewicht:

$D = D_0(1 + \alpha_{Cu}(T_f - 0)) = D_0(1 + \alpha_{Cu}T_f)$

$d = d_0(1 + \alpha_{Al}(T_f - 100^\circ\text{C})) = d_0(1 + \alpha_{Al}(T_f - T_a))$

sind beide Durchmesser gleich, also:

$D_0(1 + \alpha_{Cu}T_f) = d_0(1 + \alpha_{Al}(T_f - T_a))$

$$\Rightarrow T_f = \frac{d_0 - D_0 - T_a \alpha_{Al} d_0}{\alpha_{Cu} D_0 - \alpha_{Al} d_0} = 50,38^\circ\text{C}$$

Der Ring absorbiert also $|\Delta Q_c| = m_c c_{Cu} T_f$ und die Kugel gibt $|\Delta Q_k| = -m_k c_{Al} (T_f - T_a)$ ab.

$$|\Delta Q_c| = |\Delta Q_k| \Rightarrow m_k = \frac{m_c c_{Cu} T_f}{c_{Al} (T_a - T_f)} = 8,71 \text{g}$$

5. 1. Hauptsatz: $\Delta U = \Delta Q + \Delta W$, wobei $\Delta Q, \Delta W$ positiv bei Zufuhr

iaf: $\Delta Q_{iaf} = 50 \text{J}, \Delta W_{iaf} = -20 \text{J} \Rightarrow \Delta U_{iaf} = 30 \text{J}$

a) $\Delta U_{iaf} = \Delta U_{ibf}$

$\Delta U_{ibf} = \Delta Q_{ibf} + \Delta W_{ibf}$ mit $\Delta Q_{ibf} = 36 \text{J} \Rightarrow \Delta W_{ibf} = -6 \text{J}$

b) $\Delta U_{fi} = -30 \text{J} = -\Delta U_{iaf} \Rightarrow \Delta Q_{fi} = \Delta U_{fi} - \Delta W_{fi} = -43 \text{J}$

c) $U_f = U_i + 30 \text{J} = 40 \text{J}$

d) $U_b = 22 \text{J}$: Volumen konstant, also $\Delta W_{bf} = 0 \Rightarrow \Delta Q_{bf} = U_f - U_b = 18 \text{J}$

$\Delta U_{ib} = 12 \text{J} = \Delta Q_{ib} + \underbrace{\Delta W_{ib}}_{-6 \text{J}} \Rightarrow \Delta Q_{ib} = 18 \text{J}$

6. $d(0) = 5 \text{cm}, T_w = 0^\circ \text{C}, T_e = -10^\circ \text{C}$.

Mit der Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{dQ}{dt} = \lambda A \frac{T_{\text{Heiss}} - T_{\text{Kalt}}}{L} = \lambda A \frac{T_w - T_e}{d(t)}$$

Und der Wärmemenge, die nötig ist, um dm an Wasser gefrieren zu lassen, also $dQ = L_w \cdot dm$

$$\Rightarrow \lambda A \frac{\Delta T}{d(t)} = L_w \frac{dm}{dt} = L_w \rho_e A d'(t)$$

Man stellt nach $d'(0)$ um und erhält:

$$d'(0) = \frac{\lambda \Delta T}{L_w \rho_e d(0)} = 39,25 \frac{\text{cm}}{\text{h}}$$

7. Die Wärmemenge, die das Wasser abstrahlen muss, um zu gefrieren, entspricht der Summe der abgegebenen Wärme bis zum Erreichen von 0°C und der latenten Schmelzwärme, die es abgeben muss, um zu gefrieren, also:

$$\Delta Q = m_w c_w (0 - 6^\circ \text{C}) + (-m_w L_w) = -1612 \text{J}$$

Das Wasser strahlt mit dem Emissionsgrad $\epsilon = 0,9$ und der Temperatur $T = 6^\circ \text{C}$, der Nachthimmel wirkt als perfekter Strahler der Temperatur $T_h = -23^\circ \text{C}$, mit dem Stefan-Boltzmann-Gesetz erhält man:

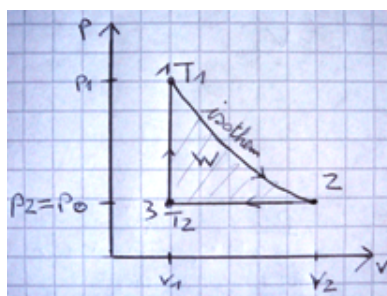
$$P = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \sigma \epsilon A T_h^4 - \sigma \epsilon A T^4 = \sigma \epsilon A (T_h^4 - T^4)$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{-m_w (L_w + T_w c_w)}{\sigma \epsilon A (T_h^4 - T^4)} = 4,5 \text{h}$$

Was weniger als einer Nacht entspricht. Diese Methode wurde in einigen Teilen der Welt vor der Erfindung von entsprechenden Maschinen tatsächlich verwendet.

2.

1. Wichtig: $nRT_1 = p_1 V_1$ sowie $nRT_1 = p_2 V_2 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$



- a) 1 → 2: Isothermer Prozess, also gilt $\Delta U = 0$ sowie $\Delta W = -nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -p_1 V_1 \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$. Überdruck bedeutet Druck über Luftdruck, also ist $p_1 = p_0 + 1,03 \cdot 10^5 \text{Pa} = 2,04 \cdot 10^5 \text{Pa}$ und p_2 ist gerade p_0 , also:

$$W_{1 \rightarrow 2} = -2 \cdot 10^4 \text{J}$$

- b) 2 → 3: Isobarer Prozess, die Arbeit entspricht gerade $-p\Delta V$. Benötigt wird also V_2 , was nach der Anfangsbemerkung gerade $V_2 = V_1 \frac{p_1}{p_2}$, also

$$W_{2 \rightarrow 3} = p_0(V_1 - V_2) = p_0(V_1 - V_1 \frac{p_1}{p_0}) = (p_0 - p_1)V_1 = 1,44 \cdot 10^4 \text{J}$$

Also entspricht die Gesamtarbeit gerade $W = W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 3} = -5,6 \text{kJ}$

2. Der Faktor nR im idealen Gasgesetz ist in beiden Fällen gleich, also folgt durch Gleichsetzen:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \Rightarrow V_2 = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} V_1 = \frac{(p_0 + \rho g \cdot 40 \text{m})}{p_0} \frac{(273 \text{K} + 20 \text{K})}{(273 \text{K} + 4 \text{K})} (20 \text{cm}^3) = 103 \text{cm}^3$$

3. Ähnlich wie bei der Transformation der Planck'schen Strahlungskurve gilt: Der Wert des Integrals muss gleich bleiben. In unseren Fall heisst das: $P(E)dE = P(v)dv$. Mit

$$\frac{dE}{dv} = mv \Rightarrow dv = \frac{dE}{mv} = \frac{dE}{\sqrt{2mE}}$$

folgt

$$\begin{aligned} P(E)dE &= P(v)dv \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{k_b T}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(\frac{-mv^2}{2k_b T}\right) dv \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{m^{3/2}}{(k_b T)^{3/2}} \frac{2E}{m} \exp\left(-\frac{m}{2k_b T} \frac{2E}{m}\right) \frac{dE}{\sqrt{2mE}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{E}}{(k_b T)^{3/2}} \frac{2}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{E}{k_b T}\right) dE \\ &= \frac{2\sqrt{E}}{\sqrt{\pi}(k_b T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{E}{k_b T}\right) dE \end{aligned}$$

Interessant ist, dass die Geschwindigkeitsverteilung nicht mehr von der Masse abhängt, sondern tatsächlich nur von der Temperatur. Dies folgt nicht aus der Gleichung für die innere Energie, sondern ist der Grund dafür, wie die nächste Aufgabe zeigt.

4. Vgl. Vorlesung: Die mittlere Geschwindigkeit eines Systems von Teilchen, das durch die Maxwell-Verteilung beschrieben wird, ist gegeben durch

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v P(v) dv$$

Analog ist die mittlere Energie dann

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \int_0^{\infty} E P(E) dE \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}(k_b T)^{3/2}} \int_0^{\infty} E^{3/2} \exp\left(-\frac{E}{k_b T}\right) dE \end{aligned}$$

Wir benutzen nun die Substitution

$$\begin{aligned} x &= \frac{E}{k_b T} \Rightarrow E = x k_b T \\ \frac{dx}{dE} &= \frac{1}{k_b T} \Rightarrow dE = dx k_b T \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}(k_b T)^{3/2}} \int_0^{\infty} x^{3/2} (k_b T)^{3/2} \exp\left(-\frac{E}{k_b T}\right) k_b T dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} k_b T \int_0^{\infty} x^{3/2} \exp(-x) dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{3}{4} \sqrt{\pi} k_b T \\ &= \frac{3}{2} k_b T\end{aligned}$$

Das ist die mittlere kinetische Energie eines Moleküls in einem Maxwell-System. Für alle N Moleküle ergibt sich dann

$$E = N \frac{3}{2} k_b T = \frac{3}{2} nRT$$

5. Die rms-Geschwindigkeit ist lt. Vorlesung $v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$. Die Fluchtgeschwindigkeit leitet sich aus der Gesamtenergie eines Teilchens auf der Erdoberfläche $E = -mgR_e + \frac{1}{2}mv^2$ und der Tatsache, dass diese Energie im Unendlichen gerade 0 sein muss, her, also folgt $v_f = \sqrt{2gR_e}$, wobei $R_e = 6370\text{km}$ ist.

a) Es muss also $\sqrt{2gR_e} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$ gelten, wobei $M = 2,02 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ die molare Masse von molekularem Wasserstoff ist. Auflösen nach T ergibt

$$T = \frac{2gR_e M}{3R} = 10^4 \text{K}$$

b) Analog mit Sauerstoff, wobei $M = 32 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \Rightarrow T = 1,6 \cdot 10^5 \text{K}$

c) Die mittlere Temperatur des Wasserstoffs entspricht in etwa der Temperatur in den höheren Schichten, also können die schnellsten Moleküle, entsprechend dem rechten Anteil der Maxwell-Kurve, entweichen. Die neue Verteilung enthält wieder einen Anteil an Wasserstoff, der schnell genug ist und entweicht usw. Daher gibt es in der Erdatmosphäre kaum Wasserstoff. Sauerstoff dagegen ist viel zu schwer, was der Grund ist, warum unser Sauerstoff zum Atmen nicht entweicht.

6. Zweiatomiges ideales Gas: 3 translatorische + 2 Rotationsfreiheitsgrade = 5 Freiheitsgrade, also $C_v = \frac{5}{2}R, C_p = C_v + R = \frac{7}{2}R$.

a) $\Delta Q = nC_p \Delta T = 4\text{mol} \cdot \frac{7}{2}R \cdot 60\text{K} = 6,98\text{kJ}$

b) $\Delta U = nC_v \Delta T = 4\text{mol} \cdot \frac{5}{2}R \cdot 60\text{K} = 4,99\text{kJ}$

c) $\Delta W = \Delta U - \Delta Q = -1,99\text{kJ}$

d) Nur translatorische Energie! $\Delta K = \frac{3}{2}nR\Delta T = 2,99\text{kJ}$

7. Analog zu 6): $C_v = \frac{5}{2}R, C_p = \frac{7}{2}R \Rightarrow \gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1,4$ (Adiabatenkoeffizient)

a) Adiabatengleichung für Druck: $p_1 V_1^\gamma = p_2 \left(\frac{V_1}{2}\right)^\gamma \Rightarrow p_2 = p_1 2^\gamma = 2,67\text{bar}$

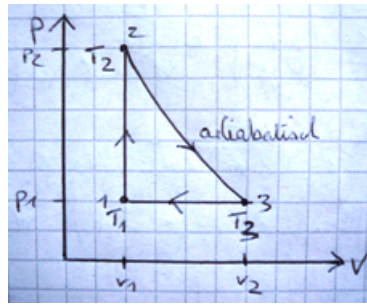
Adiabatengleichung für Temperatur: $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \Rightarrow T_2 = T_1 2^{\gamma-1} = 360\text{K}$

b) Hier gilt das ideale Gasgesetz, also

$$\frac{V_1/2}{T_2} = \frac{V_2}{T_1} \Rightarrow V_2 = 0,381$$

8. Zur Erinnerung: $\Delta U = nC_v \Delta T$ gilt **immer** für **alle** Prozesse.

Einatomiges ideales Gas: $C_v = \frac{3}{2}R, C_p = \frac{5}{2}R$



a)

- b) **1 → 2: isochor** $\Rightarrow \Delta W = 0 \Delta U = \Delta Q = nC_v(T_2 - T_1) = 3,74\text{kJ}$
2 → 3: adiabatisch $\Rightarrow \Delta Q = 0 \Rightarrow \Delta W = \Delta U = nC_v(T_3 - T_1) = -1,81\text{kJ}$
3 → 1: isobar

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta Q &= nC_p(T_1 - T_3) = -3,22\text{kJ} \\ \Delta U &= nC_v(T_1 - T_3) = -1,93\text{kJ} \\ \Rightarrow \Delta W &= \Delta U - \Delta Q = 1,29\text{kJ} \end{aligned}$$

Gesamter Prozess:

$$\begin{aligned} \Delta Q &= 3,74\text{kJ} - 3,22\text{kJ} = 520\text{J} \\ \Delta U &= 0 \text{ (Kreisprozess!)} \\ \Delta W &= \Delta U - \Delta Q = -520\text{J} \end{aligned}$$

- c) $V_1 : p_1 V_1 = nRT_1 \Rightarrow V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} = 2,46 \cdot 10^{-2} \text{m}^3$
 1 → 2 ist isochor, also bleibt das Volumen konstant, und $p_2 = \frac{nRT_2}{V_1} = 2,02 \cdot 10^5 \text{Pa}$
 3 → 1 ist isobar, also $p_3 = p_1$ und $V_2 = \frac{nRT_3}{p_1} = 3,73 \cdot 10^{-2} \text{m}^3$

3.

1. Entropie

a) Zunächst wird die Gleichgewichtstemperatur bestimmt:

$$T_f = \frac{c_w m_w T_w + c_{Al} m_{Al} T_{Al}}{c_w m_w + c_{Al} m_{Al}} = 57^\circ\text{C}$$

b) Allg. ist die Entropieänderung

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{mcdT}{T} = mc \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Für das Aluminium ergibt sich: $\Delta S_{Al} = m_{Al} c_{Al} \ln \frac{T_f}{T_{Al}} = -22,1 \frac{\text{J}}{\text{K}}$

c) Analog für das Wasser: $\Delta S_w = 24,9 \frac{\text{J}}{\text{K}}$

d) Die Entropie für das Gesamtsystem ist einfach die Summe der Teilentropien, also $\Delta S = 2,8 \frac{\text{J}}{\text{K}}$; und die ist positiv, wie sie sein sollte.

2. Die Entropiezunahme für den Würfel besteht aus drei Teilen: Die Wärmeaufnahme des Eises bis 0°C , der Schmelzvorgang bei 0°C und der Wärmeaufnahme bis 15°C . Die Temperatur des Sees kann als "annähernd" konstant betrachtet werden, wenn man sich die Massenverhältnisse klarmacht. Also, für den Eiswürfel:

$$\Delta S_{eis} = mc_{eis} \ln \frac{273\text{K}}{263\text{K}} + mc_w \ln \frac{288\text{K}}{273\text{K}} + \frac{mL_w}{273\text{K}} = 15,27 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Die Entropie für den See ist einfach $\Delta S_{see} = -\frac{dQ}{T_{see}}$, wobei dQ die dem Würfel übertragene Wärmemenge ist.

$$\Delta S_{see} = -\frac{mc_{eis}(0 - (-10^\circ\text{C})) + mL_w + mc_w(15^\circ\text{C} - 0)}{288\text{K}} = -14,51 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Die gesamte Änderung der Entropie ist damit

$$\Delta S = \Delta S_{eis} + \Delta S_{see} = 0,76 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Die Unordnung hat also im Einklang mit dem 2. Hauptsatz zugenommen.

3. Für den dargestellten Kreisprozess:

a) Wärme wird nur im Prozess ab zugeführt (isochore Expansion). Hier ist $\Delta W = 0$ und $\Delta Q_{ab} = nC_v(T_b - T_a)$. Die Temperaturen erhalten wir über das ideale Gasgesetz: $T_b = \frac{p_b V_b}{nR}$, $T_a = \frac{p_a V_b}{nR}$, eingesetzt erhält man

$$\Delta Q_{ab} = \frac{nC_v}{nR} V_b(p_b - p_a) = \frac{3}{2} V_b(p_b - p_a)$$

Wir benötigen noch p_a . Wir erkennen, dass bc ein adiabatischer Prozess ist, also

$$p_a V_a^\gamma = p_b V_b^\gamma \Rightarrow p_a = p_b \left(\frac{1}{8}\right)^\gamma = 0,316 \cdot 10^4 \text{Pa}$$

Alle weiteren Werte für ΔQ_{ab} sind bekannte, es folgt $\Delta Q_{ab} = 1,47\text{kJ}$

b) bc ist adiabatisch, also $\Delta Q_{bc} = 0$. Wärme wird nur im Prozess ca abgegeben, gemäß $\Delta Q_{ca} = nC_p(T_a - T_c)$, T_c erhält man wieder über das ideale Gasgesetz und

$$\Delta Q_{ca} = \frac{5}{2} p_a (V_b - 8V_b) = -7\frac{5}{2} p_a V_b = -554\text{J}$$

c) Für einen Umlauf ist ΔU gerade gleich Null und die Arbeit erwartungsgemäß die Differenz zwischen aufgenommener und abgegebener Wärme, also $\Delta W = -(\Delta Q) = -(\Delta Q_{ac} + \Delta Q_{ca}) = -918\text{J}$.

d) Die Effizienz ist

$$\epsilon = \frac{\text{bekommen}}{\text{gezahlt}} = \left| \frac{\Delta W}{\Delta Q_{ab}} \right| = 0,624$$

4. Gegeben sind $\gamma, p_1, p_2 = 3p_1, V_1 = V_2, V_3 = V_4 = 4V_1$ und T_1 .

a) 1 : $T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR}$

2 : $p_2 = 3p_1, T_2 = \frac{3p_1 V_1}{nR} = 3T_1$

3 : $p_2 V_2^\gamma = p_3 V_3^\gamma \Rightarrow p_3 = 3p_1 \left(\frac{V_1}{4V_1}\right)^\gamma = 3p_1 \left(\frac{1}{4}\right)^\gamma$, analog $T_3 = 3T_1 \left(\frac{1}{4}\right)^{\gamma-1}$

4 : $p_1 V_1^\gamma = p_4 V_4^\gamma \Rightarrow p_4 = p_1 \left(\frac{1}{4}\right)^\gamma, T_4 = T_1 \left(\frac{1}{4}\right)^{\gamma-1}$

b) Der Wirkungsgrad ist

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{W}{\Delta Q_{rein}} = \left| \frac{\Delta W_{23} + \Delta W_{41}}{\Delta Q_{12}} \right| = \left| \frac{nC_v(T_3 - T_2 + T_4 - T_1)}{nC_v(T_2 - T_1)} \right| \\ &= \left| \frac{1}{4^{\gamma-1}} - 1 \right| \end{aligned}$$

5. Eine ideale Kühlmaschine, die zwischen den Temperaturen T_w und T_k arbeitet, hat eine Leistungszahl von

$$K = \frac{T_k}{T_w - T_k} = 19,6$$

Diese entspricht auch der aus dem kälteren Reservoir entzogenen Wärme im Verhältnis zur aufgewandten Arbeit, also ergibt sich

$$|Q_k| = K |W_{aufgewandt}| = 19,6\text{J}$$

6. Die Leistungszahl bezieht sich auf eine Kältemaschine, ist also $K = |Q_k| / |W|$. Da es sich um eine Carnot-Kältemaschine bzw. -Wärmepumpe handelt, gilt mit dem 1. Hauptsatz auch $|Q_k| = |Q_w| - |W|$. Damit gilt insgesamt

$$|W| = \frac{7,54\text{MJ}}{K + 1} = 1,57\text{MJ}$$

Für die Leistung gilt

$$P = \frac{|W|}{1\text{h}} = 440\text{W}$$

7. Die Effizienz der Carnot-Maschine ist gegeben durch

$$\epsilon = \frac{W}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Die Leistungszahl der Carnot-Kältemaschine ist

$$\epsilon_{\text{kühl}} = \frac{Q_4}{W} = \frac{T_4}{T_3 - T_4}$$

Ausserdem gilt noch $Q_4 = Q_3 - W$. Die Arbeit W der Carnot-Maschine wird zum Antreiben der Kältemaschine verwendet, als ist W für beide gleich. Damit gilt

$$\begin{aligned} \frac{T_4}{T_3 - T_4} &= \frac{Q_3}{W} - 1 = \frac{Q_3 T_1}{Q_1 (T_1 - T_2)} - 1 \\ \Rightarrow \frac{Q_3}{Q_1} &= \left(\frac{T_4}{T_3 - T_4} + 1 \right) \left(\frac{T_1 - T_2}{T_1} \right) = \left(\frac{T_3}{T_3 - T_4} \right) \left(\frac{T_1 - T_2}{T_1} \right) = \frac{1 - T_2/T_1}{1 - T_4/T_3} \end{aligned}$$

4.

1. Die innere Energie berechnet sich ja immer über $U = \frac{3}{2}nRT$. In diesem Fall setzt sich n aus den beiden einzelnen Stoffmengen der beiden Volumina. Man berechnet also zuerst:

$$n_1 = \frac{3p_2V}{RT} \quad n_2 = \frac{pV}{RT}$$

Also ist

$$n = n_1 + n_2 = 7 \frac{pV}{RT}$$

und damit

$$U = \frac{3}{2}nRT = \frac{21}{2}pV$$

Das System ist thermisch isoliert und die beiden Gase haben dieselbe Temperatur, also ändert sich die Temperatur auch nicht.

Die innere Energie ändert sich auch nicht, also erhalten wir für p_2 :

$$\begin{aligned} U &= \frac{3}{2}nRT = \frac{3}{2}p_2 3V = \frac{9}{2}p_2 V = \frac{21}{2}pV \\ \Rightarrow p_2 &= \frac{7}{3}p \end{aligned}$$

Zur Entropie: Hier liegt ein isothermer Prozess vor, also ist

$$\begin{aligned} \Delta U &= 0 \Rightarrow dQ = -dW = pdV = \frac{nRT}{V}dV \\ \Leftrightarrow \frac{dQ}{T} &= nR \frac{dV}{V} \\ \Leftrightarrow \Delta S &= nR \ln \frac{V_2}{V_1} \end{aligned}$$

Das gilt für eine Seite; die Gesamtänderung der Entropie ist folglich die Summe

$$\Delta S = n_1 R \ln \frac{V_1}{2V} + n_2 R \ln \frac{V_2}{V}$$

Überlegung: Das große Volumen hatte 6mal so viele Moleküle wie das kleine, trägt also 6mal so viel zum Volumen bei, also ist $V_1 = 6V_2$. Weiter bekannt: $V_1 + V_2 = 3V$. Zwei Gleichungen für zwei Unbekannte: $\Rightarrow V_1 = 6V_2 = \frac{18}{7}V$. Zusammen:

$$\begin{aligned} \Delta S &= n_1 R \ln \frac{9}{7} + n_2 R \ln \frac{3}{7} \\ &= \frac{pV}{T} (6 \ln 9 - 6 \ln 7 + \ln 3 - \ln 7) \\ &= \frac{pV}{T} (13 \ln 3 - 7 \ln 7) \\ &\approx 0,66 \frac{pV}{T} \end{aligned}$$

2. Diskussion des Carnot-Zyklus

a) Hier Skizze

Besteht aus

1 \rightarrow 2: Isotherme Expansion, System nimmt Wärme vom Wärmebad auf und gibt Arbeit ab; $dQ > 0, dW < 0$

2 \rightarrow 3: Adiabatische Expansion, System gibt Arbeit ab; $dW < 0$

3 \rightarrow 4: Isotherme Kompression, System gibt Wärme an das Wärmebad ab; $dQ < 0, dW > 0$

4 \rightarrow 1: Adiabatische Kompression, es wird Arbeit am System geleistet; $dW > 0$

b) dU, dQ, dW für jeden Teilprozess

i. Isotherm: $\Rightarrow dU = 0 \Rightarrow dQ = -dW = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$

ii. Adiabatisch: $\Rightarrow dQ = 0 \Rightarrow dW = dU = nC_v(T_2 - T_1)$

iii. Isotherm: $\Rightarrow dU = 0 \Rightarrow dQ = -dW = -nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_2}$

iv. Adiabatisch: $\Rightarrow dQ = 0 \Rightarrow dW = dU = nC_v(T_1 - T_2)$

c) Wirkungsgrad:

$$\epsilon = \left| \frac{\text{bekommen}}{\text{gezahlt}} \right| = \left| \frac{dW_{\text{ges}}}{dQ_{12}} \right| = \frac{T_{\text{heiss}} - T_{\text{kalt}}}{T_{\text{heiss}}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

3. Siehe passende Musterlösung.