

Musterlösung

Experimentalphysik II - Ferienkurs

Andreas Schindewolf

1 Random Kreisprozess

- a) Wärme wird nur im isochoren Prozess ab zugeführt. Hier ist $\Delta W = 0$ und $\Delta Q_{ab} = nC_V(t_b - T_a)$. Die Temperatur erhält man über die Zustandsgleichung für ideale Gase als $T_b = \frac{p_b V_b}{nR}$ und $T_a = \frac{p_a V_b}{nR}$. In ΔQ_{ab} eingesetzt ergibt

$$\Delta Q_{ab} = \frac{nC_V}{nR} V_b (p_b - p_a) = \frac{3}{2} V_b (p_b - p_a). \quad (1.1)$$

Da bc ein adiabatischer Prozess ist, lässt sich der fehlende Druck p_a über einer der Adiabatangleichungen lösen:

$$p_a V_a^\kappa = p_b V_b^\kappa \rightarrow p_a = p_b \left(\frac{1}{8} \right)^\kappa = 0,316 \cdot 10^4 \text{ Pa}. \quad (1.2)$$

In ΔQ_{ab} (1.1) eingesetzt folgt

$$\Delta Q_{ab} = 1,47 \text{ kJ}. \quad (1.3)$$

- b) Nur über den isobaren Prozess ca wird Wärme abgegeben gemäß $\Delta Q_{ca} = nC_p(T_a - T_c)$. T_c erhält man wiederum über die Zustandsgleichung

$$\Delta Q_{ca} = \frac{5}{2} p_a (V_b - 8V_b) = -7 \frac{5}{2} p_a V_b = -554 \text{ J}. \quad (1.4)$$

- c) Für einen Umlauf ist ΔU gerade gleich Null und die Arbeit erwartungsgemäß die Differenz zwischen aufgenommener und abgegebener Wärme, also

$$\Delta W = -(\Delta Q) = -(\Delta Q_{ac} + \Delta Q_{ca}) = -918 \text{ J}. \quad (1.5)$$

- d) Mit ΔQ_{ab} (1.3) und ΔW (1.5) ergibt der Wirkungsgrad

$$\Delta \eta = \frac{|\Delta W|}{\Delta Q_{ab}} = 0,624. \quad (1.6)$$

2 Dieselmotor

a)

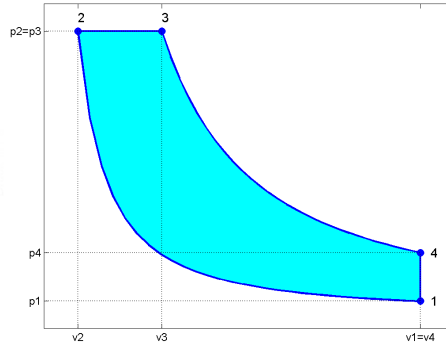


Abbildung 1: p - V -Diagramm des Dieselmotors.

- b) Im ersten Teilprozess, der adiabatischen Kompression, folgt der Druck p_2 aus der Adiabatangleichung für Luft (2-atomig: $\kappa = \frac{7}{5}$, es soll angenommen werden, dass die Freiheitsgrade der Schwingung noch nicht angeregt sind, ansonsten wäre der Adiabatenindex κ von der Temperatur abhängig)

$$p_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\kappa p_1 = 21^{\frac{7}{5}} \cdot 1013 \text{ bar} \approx 71,92 \text{ bar.} \quad (2.1)$$

Die Adiabatangleichung für die Temperatur liefert

$$T_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1} T_1 \approx 973,38 \text{ K.} \quad (2.2)$$

Für die nächste Zustandsänderung folgt für das Volumen V_3 nach dem Gesetz von Gay-Lussac (Zustandsgleichung für konstanten Druck)

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{T_3}{T_2}. \quad (2.3)$$

Die isochore Abkühlung im Schritt vier impliziert $V_4 = V_1$. Damit und mit (2.3) können die Zustandsgrößen für den dritten Schritt, die adiabatische Expansion, bestimmt werden:

$$p_4 = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^\kappa p_3 = \left(\frac{V_3}{V_2} \frac{V_2}{V_4}\right)^\kappa p_3 = \left(\frac{T_3}{T_2} \frac{V_2}{V_1}\right)^\kappa p_3 = 3,32 \text{ bar,} \quad (2.4)$$

$$T_4 = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\kappa-1} T_3 = \left(\frac{T_3}{T_2} \frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1} T_3 = 944,14 \text{ K.} \quad (2.5)$$

- c) Das Einspritzverhältnis $\frac{V_3}{V_2}$ lässt sich direkt mit (2.3) berechnen.

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{T_3}{T_2} = 2,34 \quad (2.6)$$

- d) Da für jeden Kreisprozess $\Delta U = 0$ gilt, vereinfacht sich der thermische Wirkungsgrad η zu

$$\eta = \frac{W_{ges}}{Q_{in}} = \frac{Q_{in} + Q_{out}}{Q_{in}} = 1 + \frac{Q_{out}}{Q_{in}} \quad (2.7)$$

Diese Form ist in diesem Fall nützlicher, da es nur einen Prozess mit Wärmezufuhr und einen mit Wärmeabfuhr gibt.

Für den isobaren Prozess gilt (Wärmezufuhr)

$$Q_{in} = nC_p(T_3 - T_2) \quad (2.8)$$

und für den isochoren (Wärmeabfuhr)

$$Q_{out} = nC_V(T_1 - T_4). \quad (2.9)$$

Dies lässt sich nun in (2.7) einsetzen um den Wirkungsgrad zu erhalten:

$$\eta = 1 + \frac{nC_V(T_1 - T_4)}{nC_p(T_3 - T_2)} = 1 - \kappa^{-1} \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2} = 0,64 \quad (2.10)$$

- e) Für den Carnotwirkungsgrad muss die höchste Temperatur $T_h = 2273\text{K}$ und die niedrigste $T_n = 288\text{K}$ eingesetzt werden

$$\eta_C = 1 - \frac{T_n}{T_h} = 0,87. \quad (2.11)$$

Der ideale Carnotprozess ist also in der Tat deutlich effizienter als ein idealisierter Dieselmotor bei der selben Temperaturspanne.

3 Otto-Prozess

a)

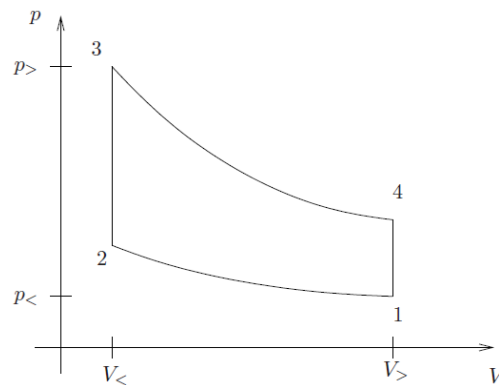


Abbildung 2: p - V -Diagramm des Otto-Prozess.

- b) Mit Hilfe der Adiabaten Gleichung des idealen Gases

$$pV^\kappa = \text{const} \quad (3.1)$$

(mit $\kappa = \frac{7}{5}$ für ein 2-atomiges Gas) kann man die unbekannt Drücke aus den gegebenen Drücken und den Volumenverhältnissen berechnen:

$$p_2 = p_< \left(\frac{V_>}{V_<} \right)^{\frac{7}{5}} \quad (3.2)$$

und

$$p_4 = p_> \left(\frac{V_<}{V_>} \right)^{\frac{7}{5}}. \quad (3.3)$$

- c) Arbeit wird beim Übergang von Zustand 1 nach 2 und beim Übergang von 3 nach 4 geleistet. Diese beiden Werte kann man am einfachsten berechnen, indem man die innere Energie U des Gases betrachtet, denn da die Arbeitstakte adiabatisch sind, gilt für die am Gas verrichtete Arbeit:

$$W_{12} = U_2 - U_1, \quad W_{34} = U_4 - U_3. \quad (3.4)$$

Die innere Energie des 2-atomigen idealen Gases ist wegen $f = 5$:

$$U = \frac{5}{2}nRT \stackrel{\text{Zustandsgl.}}{=} \frac{5}{2}pV. \quad (3.5)$$

In (3.4) eingesetzt folgt

$$W_{12} = \frac{5}{2}p_2V_2 - \frac{5}{2}p_1V_1 \stackrel{(3.2)}{=} \frac{5}{2}p_1V_1 \left(\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\frac{2}{5}} - 1 \right) \quad (3.6)$$

und analog

$$W_{34} = \frac{5}{2}p_4V_4 - \frac{5}{2}p_3V_3 \stackrel{(3.3)}{=} \frac{5}{2}p_3V_3 \left(\left(\frac{V_4}{V_3} \right)^{\frac{2}{5}} - 1 \right). \quad (3.7)$$

Die Arbeit $|W_{ges}|$, die vom System während eines Zyklus verrichtet wird, ist die negative Summe dieser beiden Terme, also

$$|W_{ges}| = \frac{5}{2}p_1V_1 \left(1 - \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\frac{2}{5}} \right) + \frac{5}{2}p_3V_3 \left(1 - \left(\frac{V_4}{V_3} \right)^{\frac{2}{5}} \right). \quad (3.8)$$

- d) Für den Wirkungsgrad wird noch die ins System gesteckte Wärme Q_{in} benötigt. Der Wärmezustrom geschieht im Schritt 2 nach 3 (Zündung des Benzin-Luft-Gemisches). Da dieser Prozess isochor ist, wird dabei keine Arbeit verrichtet und man kann die zugeführte Wärme $Q_{in} = Q_{23}$ aus der Änderung der inneren Energie des Gases berechnen:

$$Q_{23} = \frac{5}{2}p_3V_3 - \frac{5}{2}p_2V_2 \stackrel{(3.2)}{=} \frac{5}{2} \left(p_3V_3 - p_2V_2 \left(\frac{V_3}{V_2} \right)^{\frac{2}{5}} \right). \quad (3.9)$$

Für den Wirkungsgrad η folgt also mit (3.8)

$$\eta = \frac{|W_{ges}|}{Q_{in}} = \frac{p_1V_1 \left(1 - r^{\frac{2}{5}} \right) + p_3V_3 \left(1 - r^{-\frac{2}{5}} \right)}{p_3V_3 - p_2V_2 r^{\frac{2}{5}} = 1 - r^{-\frac{2}{5}}}. \quad (3.10)$$

- e) Die gesuchte Leistung ergibt sich aus der in Teil c) berechneten Nettoarbeit $|W_{ges}|$ pro Zyklus per

$$P = |W_{ges}|N \quad (3.11)$$

wobei N die Anzahl der effektiven Zyklen pro Sekunde ist

$$N = \frac{1}{2} \cdot \frac{3000}{60\text{s}} = 25 \frac{1}{\text{s}}. \quad (3.12)$$

Für $|W_{ges}|$ brauchen wir noch das minimale und das maximale Volumen. Diese ergeben sich aus der Verdichtung r und dem Hubraum ΔV zu

$$V_2 = \frac{r}{r-1} \Delta V = 1,111, \quad V_4 = \frac{1}{r-1} \Delta V = 0,111. \quad (3.13)$$

In (3.8) eingesetzt erhält man damit die verrichtete Nettoarbeit

$$|W_{ges}| = \frac{5}{2}p_1V_1 \left(1 - r^{\frac{2}{5}} \right) + \frac{5}{2}p_3V_3 \left(1 - r^{-\frac{2}{5}} \right) = 816 \text{ J}. \quad (3.14)$$

Setzt man nun die Ergebnisse für zugeführte Wärme und verrichtete Nettoarbeit in die Definition der Leistung (3.11) ein erhält man

$$P = 25 \frac{1}{\text{s}} \cdot 816 \text{ J} = 20,4 \text{ kW}. \quad (3.15)$$

4 Kernkraftwerk

Der maximal mögliche Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine zwischen den beiden Temperaturen T_n und T_h (mit $T_h > T_n$) ist der Carnot-Wirkungsgrad

$$\eta_C = 1 - \frac{T_n}{T_h} = 1 - \frac{293,15 \text{ K}}{663,15 \text{ K}} \approx 0,558. \quad (4.1)$$

Da der Wirkungsgrad das Verhältnis von verrichteter Arbeit W zu aufgenommener Wärme Q_{in} angibt folgt für die aufgenommene Wärme Q_{in} :

$$\eta = \frac{W}{Q_{in}} \rightarrow Q_{in} = \frac{W}{\eta}. \quad (4.2)$$

Für die abgegebene Abwärme gilt anschließend gemäß Energieerhaltung:

$$Q_{out} = Q_{in} - W = \left(\frac{1}{\eta} - 1\right) W. \quad (4.3)$$

(Achtung: Hier sind alle auftretenden Größen positiv definiert.)

Die Wärmeleistung \dot{Q}_{out} lässt sich analog berechnen:

$$\dot{Q}_{out} = \left(\frac{1}{0,558} - 1\right) 900 \text{ MW} \approx 713 \text{ MW}. \quad (4.4)$$

Wenn der tatsächliche Wirkungsgrad nur $\eta = 0,6 \cdot \eta_C = 0,335$ beträgt (was durchaus realistisch ist), dann ist der Abwärmestrom

$$\dot{Q}_{out} = \left(\frac{1}{0,335} - 1\right) 900 \text{ MW} \approx 1787 \text{ MW}. \quad (4.5)$$

Mit dieser Wärmeleistung kann man das Flusswasser um ΔT gemäß

$$c_W \rho \dot{V} \Delta T = \dot{Q}_{out} \quad (4.6)$$

erwärmen, wobei ρ die Dichte des Wasser und \dot{V} der Volumenstrom ist. Die Temperaturerhöhung ist folglich

$$\Delta T = \frac{\dot{Q}_{out}}{c_W \rho \dot{V}} = 2,6 \text{ K}. \quad (4.7)$$

5 Kaffee mit Milch

[a)]

1. Um die durch den Wärmefluss erzeugte Entropie zu ermitteln, berechnet man zuerst die Mischungstemperatur von Kaffee und Milch.

Da man Milch und Kaffee als System ohne äußeren Einfluss betrachtet, findet nur ein Wärmeübertrag von der Milch in den Kaffee Q_{MK} und einer in die Gegenrichtung Q_{KM} statt. Es gilt der erste Hauptsatz in der Form

$$0 = \Delta U = Q = Q_{MK} + Q_{KM}. \quad (5.1)$$

Mit der spezifischen Wärmekapazität ergibt sich daraus die Mischtemperatur \bar{T}

$$m_K c_W (T_K - \bar{T}) = -m_M c_W (T_M - \bar{T}), \quad (5.2)$$

$$\rightarrow \bar{T} = \frac{T_K m_K + T_M m_M}{m_K + m_M} = 346,2 \text{ K}. \quad (5.3)$$

(5.2) impliziert den Wärmeübertrag

$$Q_{KK} = -Q_{MK} = 14212 \text{ J.} \quad (5.4)$$

Um die Entropiezunahme beziehungsweise -abnahme berechnen zu können, modellieren wir den Temperaturangleichungsvorgang durch einen linearen Wärmefluss:

$$\dot{Q} = \frac{Q_{KM}}{\Delta t}. \quad (5.5)$$

Wie man leicht überprüfen kann bedeutet ein solcher Wärmefluss für die Temperaturen von Milch und Kaffee während des Angleichungsprozesses ($0 < t < \Delta t$):

$$T_K(t) = \frac{\bar{T} - T_K}{\Delta t} t + T_K, \quad (5.6)$$

$$T_M(t) = \frac{\bar{T} - T_M}{\Delta t} t + T_M. \quad (5.7)$$

Damit ist nun auch alles bekannt, um die Entropieänderungen der beiden Teilsysteme „Kaffee“ und „Milch“ während des Wärmeaustauschs mit dem zweiten Hauptsatz zu berechnen ($\dot{S} = \frac{\dot{Q}}{T}$ und Gleichung (5.5)):

$$\dot{S}_K(t) = -\frac{|Q|}{(\bar{T} - T_K)t + T_K \Delta t}, \quad (5.8)$$

$$\rightarrow \Delta S_K(t) = \int_0^{\Delta t} \dot{S}_K(t) dt = -\frac{|Q|}{(\bar{T} - T_K)} \ln \left(\frac{\bar{T}}{T_K} \right); \quad (5.9)$$

$$\dot{S}_M(t) = -\frac{|Q|}{(\bar{T} - T_M)t + T_M \Delta t}, \quad (5.10)$$

$$\rightarrow \Delta S_M(t) = \int_0^{\Delta t} \dot{S}_M(t) dt = -\frac{|Q|}{(\bar{T} - T_M)} \ln \left(\frac{\bar{T}}{T_M} \right). \quad (5.11)$$

Die Integrationen müssen zum Beispiel durch Integration durch Substitution gelöst werden.

Mit der Extensivität der Entropie folgt für die Entropieänderung des Gesamtsystems

$$\Delta S = |Q| \left(\frac{1}{(\bar{T} - T_M)} \ln \left(\frac{\bar{T}}{T_M} \right) - \frac{1}{(\bar{T} - T_K)} \ln \left(\frac{\bar{T}}{T_K} \right) \right) = 5,6 \frac{\text{J}}{\text{K}}. \quad (5.12)$$

Man sieht, dass die Länge des Wärmeübertragungsvorganges für die Entropie keine Rolle spielt (schließlich ist Entropie eine Zustandsgröße und damit auch die Annahme des linearen Wärmetransports gerechtfertigt), und dass in Übereinstimmung mit dem zweiten Hauptsatz und der Befürchtung des Studenten die Entropie der Welt durch die Herstellung des Milchkaffees größer wird.

- Der Student hat bei dieser quantitative Rechnung nicht bedacht, dass auch das Vermischen zweier verschiedener Flüssigkeiten ein irreversibler Vorgang ist, der nach dem zweiten Hauptsatz auch Entropie erzeugt – wahrscheinlich sogar noch mehr als die Temperaturangleichung! Es wurde also nur gezeigt, dass bei der Milchkaffeeherstellung $\Delta S > 5,6 \frac{\text{J}}{\text{K}}$ ist.

6 Mischung zweier thermischer Systeme

Die innere Energie berechnet sich über $U = \frac{3}{2}nRT$. In diesem Fall setzt sich n aus den beiden einzelnen Stoffmengen der beiden Volumina zusammen:

$$n = n_1 + n_2 = \frac{3p_2V}{RT} + \frac{pV}{RT} = 7\frac{pV}{RT} \quad (6.1)$$

und damit

$$U = \frac{3}{2}nRT = \frac{21}{2}pV. \quad (6.2)$$

Das System ist thermisch isoliert und die beiden Gase haben dieselbe Temperatur, also bleibt die Temperatur konstant. Auch die innere Energie ändert sich nicht. So erhalten wir für p_2 :

$$U = \frac{3}{2}nRT = \frac{3}{2}p_23V = \frac{9}{2}p_2V = \frac{21}{2}pV, \quad (6.3)$$

$$p_2 = \frac{7}{3}p. \quad (6.4)$$

Da ein isothermer Prozess vorliegt, gilt für die Änderung der Entropie:

$$U = 0, \rightarrow dQ = -dW = pdV = \frac{nRT}{V}dV, \quad (6.5)$$

$$\leftrightarrow \frac{dQ}{T} = nR\frac{dV}{V}, \quad (6.6)$$

$$\Delta S = nR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right). \quad (6.7)$$

Das große Volumen hatte das sechsfache der Molekülanzahl gegenüber dem kleineren, also trägt es sechs mal so viel zum Volumen bei $V_1 = 6V_2$. Mit $V_1 + V_2 = 3V$ folgt $V_1 = 6V_2 = \frac{18}{7}V$. Setzt man dies zusammen mit den Stoffmengen (6.1) in die Summe der Entropieänderung ein, erhält man:

$$\Delta S = n_1R \ln\left(\frac{V_1}{2V}\right) + n_2R \ln\left(\frac{V_2}{V}\right) = n_1R \ln\left(\frac{9}{7}\right) + n_2R \ln\left(\frac{3}{7}\right) = \quad (6.8)$$

$$= \frac{pV}{T}(6 \ln(9) - 6 \ln(7) + \ln(3) - \ln(7)) = \frac{pV}{T}(13 \ln(3) - 7 \ln(7)) \approx 0,66\frac{pV}{T}. \quad (6.9)$$

7 Entropie komprimierten Gases

Die Entropieänderung dS des Gases bei Zuführung der infinitesimalen Wärme dQ bei der Temperatur T ist

$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (7.1)$$

Wegen der isothermen Kompression ist $T = T_u = \text{const}$ und $U = \frac{3}{2}nRT = \text{const}$. Damit ergibt sich für dQ aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik:

$$dU = dQ + dW \rightarrow dQ = -dW = pdV. \quad (7.2)$$

In (7.1) eingesetzt ergibt sich mit der Zustandsgleichung:

$$dS = \frac{pdV}{T_u} = \frac{nRTdV}{V}. \quad (7.3)$$

Integration über das Volumen liefert:

$$\Delta S = nR \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nR \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) =: \Delta S_g. \quad (7.4)$$

(ΔS_g ist negativ, denn $V_2 < V_1$.)

Die Entropieänderung der Umgebung ist

$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (7.5)$$

Da die Wärme die die Umgebung aufnimmt genau die Wärme ist, die das Gas abgibt, also $dQ_u = -dQ$, folgt in Analogie:

$$\Delta S_u = -\Delta S_g. \quad (7.6)$$

Daher ist die Gesamtänderung der Entropie Null, d.h. die isotherme Kompression ist reversibel.

8 Coole Drinks

Es gilt drei Fälle zu unterscheiden: 1) Das Eis erreicht gerade den Schmelzpunkt und schmilzt nicht. 2) Ein Teil des Eises schmilzt und es stellt sich eine Temperatur von 0°C ein. 3) Das ganze Eis schmilzt und es stellt sich eine Temperatur oberhalb von 0°C ein.

- 1) Aus der Wärme, die dem Eis (E) zugeführt wird $\Delta Q_E = m_E c_E (T_{end} - T_E)$, und der Wärme, die dem Wasser (W) entzogen wird $\Delta Q_W = -m_W c_W (T_{end} - T_W)$, lässt sich eine Endtemperatur T_{end} berechnen:

$$\Delta Q_E = \Delta Q_W \rightarrow T_{end} = \frac{m_E c_E T_E + m_W c_W T_W}{m_E c_E + m_W c_W} = 16,6^\circ\text{C}. \quad (8.1)$$

T_{end} liegt über dem Schmelzpunkt von Eis. Folglich muss mindestens ein Teil vom Eis geschmolzen sein, die Rechnung berücksichtigt das nicht und ist daher falsch. $\cancel{!}$

- 2) Ein Teil des Eises schmilzt $m < m_E$. Diesmal soll die schmelzende Eismenge aus den Wärmen, mit der Latenten Schmelzwärme $\Delta Q_E = m_E c_E (0^\circ\text{C} - T_E) + m \lambda_s$ und $\Delta Q_W = -m_W c_W (0^\circ\text{C} - T_W) = m_W c_W T_W$ berechnet werden:

$$\Delta Q_E = \Delta Q_W \rightarrow m = \frac{m_E c_E T_E + m_W c_W T_W}{\lambda_s} = 53 \text{ g}. \quad (8.2)$$

Es ist also genug Eis vorhanden, um das Wasser auf 0°C runterzukühlen, aber nicht gefrieren zu lassen, da nur ein Teil des Eises schmilzt. Dies ist die gesuchte Lösung.

- 3) Dieser Fall tritt ein, wenn nur ein Eiswürfel verwendet wird: Es sind weniger als 53 g Eis vorhanden, also schmilzt das ganze Eis und das Gemisch erreicht eine Temperatur oberhalb von 0°C .

Mit Hilfe der Wärmen $\Delta Q_W = -m_W c_W (T_{end} - T_W)$ und $\Delta Q_E = c_E m_E (0 - T_E) + c_W m_W (T_E - 0) + m_E \lambda_s$ kann die Temperatur nach dem Schmelzvorgang ermittelt werden:

$$\Delta Q_E = \Delta Q_W \rightarrow T_{end} = \frac{c_W m_W T_W + c_E m_E T_E - m_E \lambda_s}{c_W (m_W + m_E)} = 2,5^\circ\text{C}. \quad (8.3)$$