

1 Fouriertransformation

Zeigen sie, dass :

a)

$$\begin{aligned} f(-t) &= f(t) \Leftrightarrow F(-\omega) = F(\omega) \\ f(-t) &= -f(t) \Leftrightarrow F(-\omega) = -F(\omega) \end{aligned}$$

b)

$$f'(t) \leftrightarrow i\omega F(\omega)$$

c) Stellen sie die Sinus-Reihe $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k^2}$ in der Form $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ dar

d) Stellen sie die Cosinus-Reihe $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 4kt}{k^3}$ in der Form $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ dar

e) Gegeben ist die 2π -periodische Funktion f durch $f(x) = |x|$, für $-\pi \leq x \leq \pi$. Berechnen sie die Koeffizienten der zugehörigen reellen Fourier- Reihe $F(x)$

f) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von f

$$f(t) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \exp[-a(t+b)^2] + \sqrt{\frac{a}{\pi}} \exp[-a(t-b)^2] \quad \text{mit } a > 0$$

2 Dirac-Distribution

Für die Dirac-Distribution gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

Nehmen Sie an, dass $f(x)$ in eine Taylor- Reihe um die Punkt x_0 entwickelt werden kann. Zeigen Sie, dass :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda^2}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\lambda^2}\right) = \delta(x)$$

3 Laplacetransformationen

Lösen sie mittels Laplace-Transformation das Anfangswertproblem :

a)

$$\ddot{y} - 6\dot{y} + 9y = 32e^{-t} \cos(4t), \quad y(0) = y_0 \quad \dot{y}(0) = \delta y_0$$

b)

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = e^{-2t} + te^{-t}, \quad y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = 0$$