

1 Matrix exponential

Berechnen Sie $e^{\mathbf{A}}$ für:

a)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2 Zeitgeordnete Exponential

Berechnen Sie der zeitgeordnete Exponential der Matrix:

a)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 2t^2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2t \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

3 Fixpunkt, Linearisierung

a) Bestimmen Sie die Fixpunkte des DGL-Systems und untersuchen sie deren Stabilität für die Parameterwerte $p = -1, 0, 2$.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= px(y^2 - 1) + y \\ \dot{y} &= -x \end{aligned}$$

b) Bestimmen sie die Fixpunkte des DGL-Systems und untersuchen Sie deren Stabilität. Wie lautet der Linearisierung des Systems am Fixpunkt?

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 + 2y - 4 \\ \dot{y} &= -2xy \end{aligned}$$

c) Gegeben ist die DGL:

$$\ddot{x} = -\sin(x)$$

Schreiben Sie die DGL als System erster Ordnung der Form $g'(x) = F(g(x))$. Bestimmen Sie die Fixpunkte und deren Stabilität. Wie lautet die Linearisierung von F am Fixpunkt?

4 Potenzreihen

Lösen sie das Anfangswertproblem mittels Potenzreihenansatz:

a)

$$(x^2 - 1)\dot{y}(x) + xy(x) - \frac{1}{4}y(x) = 0, \quad y(0) = 1 \quad \dot{y}(0) = \frac{1}{2}$$

b)

$$(1 + 2x)\dot{y}(x) + 2y(x) - 1 = 0, \quad y(0) = 0$$

c)

$$x\dot{y}(x) = (x + 2)y(x)$$