

Musterlösung für die Aufgaben zur experimentellen Thermodynamik

04.08.2008

Experimentalphysik-2-Ferienkurs

Fragen gerne an johannes.burkart@mytum.de

1 Bimetallthermometer

In Skizze 1 ist das einfache Bimetallthermometer dargestellt.

Bei einer Temperaturänderung ΔT ändern sich die Längen der beiden Metalle unterschiedlich stark und verbiegen sich deshalb, wie in der Skizze dargestellt. Da wir annehmen können, dass durch die Fixierung der Abstand der beiden Metallstäbe überall konstant bei d bleibt, folgt, dass die beiden Stäbe zwei Kreissegmente über den Winkel ϕ darstellen:

$$\phi = \frac{L \cdot (1 + \alpha_1 \Delta T)}{r} = \frac{L \cdot (1 + \alpha_2 \Delta T)}{r + d} \quad (1)$$

Über Gleichsetzen erhält man den Radius r des inneren Kreissegments

$$r = d \left(\frac{1}{\frac{1 + \alpha_2 \Delta T}{1 + \alpha_1 \Delta T} - 1} \right) \quad (2)$$

Diesen Radius kann man in Gleichung (1) einsetzen und erhält so den Kreissegmentswinkel ϕ der glücklicherweise auch der Zeigerwinkel ist, um den der Zeiger des Thermometers gegenüber die Nulllage verdreht ist:

$$\phi = \frac{L}{d} \cdot (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \Delta T \quad (3)$$

Der Drehwinkel hängt also linear mit der Temperaturänderung zusammen.

Wegen der Nullpunktswahl $\phi = 0 \equiv \vartheta = 0^\circ\text{C}$ und der Äquivalenz der beiden Einheiten 1 K und 1°C können wir statt ΔT nun ϑ schreiben und auflösen:

$$\vartheta = \frac{d}{(\alpha_2 - \alpha_1)L} \cdot \phi \quad (4)$$

Indem wir bei $\vartheta = 0^\circ\text{C}$ die Stäbe gleicher Länge fixieren, dann bei Kontakt des Thermometers zu einem kochenden Wasserbad einen 100°C -Strich auf die Winkelskala machen und die Winkel zwischen diesem Strich und $\phi = 0^\circ$ äquidistant einteilen haben wir ein alternatives Celsius-Thermometer geeicht.

2 Autoreifen

zu a):

Wenn das Volumen eines idealen Gases konstant gehalten wird, so ist $\frac{T}{P} = \text{const.}$ (Gesetz von Amontons). Folglich gilt für die Größen vor (T_v, P_v) und nach (T_n, P_n) der Autofahrt

$$\frac{T_v}{P_v} = \frac{T_n}{P_n} \quad (5)$$

$$\Rightarrow T_n = \frac{P_n}{P_v} \cdot T_v \approx 360.9 \text{ K} \hat{=} 87.8^\circ \text{C} \quad (6)$$

zu b):

Um diese kompliziertere Problemstellung zu lösen führt kein Weg daran vorbei, die ideale Gasgleichung für das Gas vor der Fahrt und für das Gas nach der Fahrt explizit aufzustellen:

$$P_v V_v = n R T_v \quad (7)$$

$$P_n \cdot 1.07 \cdot V_v = n R \tilde{T}_n \quad (8)$$

Durch eliminieren von V_v aus den beiden Gleichungen (7) und (8) folgt für die korrigierte Temperatur nach der Fahrt

$$\tilde{T}_n = 1.07 \cdot \frac{P_n}{P_v} T_v = 1.07 \cdot T_n = 386.2 \text{ K} \hat{=} 113.0^\circ \text{C} \quad (9)$$

Wenn sich der Reifen also ausgedehnt hat, und der Druck trotzdem so hoch ist, muss sich die *absolute* (das heißt Kelvin-) Temperatur sogar noch 7% mehr erhöht haben.

3 Gasgemisch

In Abbildung 2 ist die prinzipielle Situation vor Öffnen des Ventils mit den relevanten Größen dargestellt.

Die Stoffmenge Neon, die vorhanden ist, lässt sich aus der Masse berechnen

$$n_{Ne} = \frac{800 \text{ g}}{20.2 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} \approx 39.6 \text{ mol} \quad (10)$$

Das selbe geht für Helium über die ideale Gasgleichung

$$n_{He} = \frac{P_{He} V_{He}}{R T_{He}} \approx 95.3 \text{ mol} \quad (11)$$

zu a):

Für das Gesamtsystem gilt laut Aufgabe $Q = W = 0$ und damit für die beiden Teilsysteme 1 (Helium) und 2 (Neon):

$$\Delta U = 0 = Q_{12} + Q_{21} \quad (12)$$

$$\Rightarrow n_{He} \tilde{c}_{V_{He}} (\bar{T} - T_{He}) = n_{Ne} \tilde{c}_{V_{Ne}} (T_{Ne} - \bar{T}) \quad (13)$$

$$\Rightarrow \bar{T} = \frac{n_{He} T_{He} + n_{Ne} T_{Ne}}{n_{He} + n_{Ne}} = 315.4 \text{ K} \quad (14)$$

Dabei wurde verwendet, dass für die einatomigen Gase $\tilde{c}_{V_{Ne}} = \tilde{c}_{V_{He}} = \frac{3}{2}R$ ist.

zu b):

Das Gesamtvolumen des Gefäßes beträgt laut Aufgabe und unter Verwendung des idealen Gasgesetzes für Neon

$$V_{ges} = 2 \text{ m}^3 + \frac{n_{Ne}RT_{Ne}}{P_{Ne}} \approx 2.54 \text{ m}^3 \quad (15)$$

Eine wichtige Erfahrungstatsache über Gemische idealer Gase ist, dass der resultierende Druck die Summe der von jedem Gas allein herrührenden Drücke (der sogenannten *Parti-aldrücke*) ist. Also:

$$P_{Ne}V_{ges} = n_{Ne}R\bar{T} \quad (16)$$

$$P_{He}V_{ges} = n_{He}R\bar{T} \quad (17)$$

$$\Rightarrow P = \frac{(n_{Ne} + n_{He})R\bar{T}}{V_{ges}} \approx 1.4 \text{ bar} \quad (18)$$

zu c):

Die Masse von Neon $m_{Ne} = 0.8 \text{ kg}$ ist gegeben. Die Masse von Helium ist $m_{He} = n_{He}M_{He}$ mit der Molmasse M_{He} von Helium. Es ist

$$m_{He} \approx 0.385 \text{ kg} \quad (19)$$

$$\Rightarrow r_{He} = \frac{m_{He}}{m_{He} + m_{Ne}} \approx 0.325 \quad (20)$$

$$\Rightarrow r_{Ne} = \frac{m_{Ne}}{m_{He} + m_{Ne}} \approx 0.675 \quad (21)$$

zu d):

Die absolute Wärmekapazität des Gasgemisches ist die Summe der Wärmekapazitäten seiner Teilgase (wegen der Extensivität der Energie). Also gilt:

$$\hat{c}_{P_{ges}} = \hat{c}_{P_{He}} + \hat{c}_{P_{Ne}} = n_{He}\tilde{c}_{P_{He}} + n_{Ne}\tilde{c}_{P_{Ne}} \approx 2802 \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad (22)$$

Hierbei wurde ausgenutzt, dass für die einatomigen Gase $\tilde{c}_{P_{He}} = \tilde{c}_{P_{Ne}} = \frac{5}{2}R$ ist (Beweis in Aufgabe 4).

4 Molare Wärmekapazität idealer Gase

zu a):

Bei konstantem Volumen verrichtet das System keine Kraft entlang eines Weges, also $W = 0$. Dann lautet der differentielle erste Hauptsatz

$$dU = dQ = n\tilde{c}_V dT \quad (23)$$

Der Gleichverteilungssatz besagt aber für ein ideales Gas mit N Teilchen

$$U = \frac{f}{2} N k_B T = \frac{f}{2} n R T \quad (24)$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dT} = \frac{f}{2} n R \quad (25)$$

$$\Rightarrow dU = \frac{f}{2} n R dT \quad (26)$$

Wenn man dies in Gleichung 23 einsetzt erhält man als Ergebnis für die molare Wärmekapazität eines idealen Gases bei konstantem Volumen

$$\tilde{c}_V = \frac{f}{2} R \quad (27)$$

zu b):

Bei konstantem Druck lautet der erste Hauptsatz (nun bereits unter Verwendung des Gleichverteilungssatzes)

$$dU = dQ - dW \quad (28)$$

$$\Rightarrow \frac{f}{2} n R dT = n \tilde{c}_P dT - P dV \quad (29)$$

$$\Rightarrow \frac{f}{2} n R dT = n \tilde{c}_P dT - \frac{n R}{P} P dT \quad (30)$$

$$\Rightarrow n \left(\frac{f}{2} R + R \right) = n \tilde{c}_P \quad (31)$$

$$\Rightarrow \tilde{c}_P = \tilde{c}_V + R \quad (32)$$

Im zweiten Schritt wurde die ideale Gasgleichung verwendet, um dV zu ersetzen.

Die isobare molare Wärmekapazität ist also gerade um die universelle Gaskonstante R größer als diejenige bei konstantem Volumen, weil zusätzliche Energie aufgewendet wird um die Volumenausdehnung zu bewerkstelligen.

5 Adiabatische Zustandsänderung

Wenn $\dot{Q} = 0$, eine Zustandsänderung also adiabatisch ist, lautet der erste Hauptsatz für eine infinitesimale Expansion

$$\Delta U = n \tilde{c}_V dT = -W = -P dV \quad (33)$$

Mit der idealen Gasgleichung lässt sich $P = \frac{n R T}{V}$ ersetzen und aus Aufgabe 4 wissen wir $\tilde{c}_V = \frac{f}{2} R$. Zusammen nimmt der erste Hauptsatz nun die folgende Form an:

$$\frac{f}{2} \frac{dT}{T} = -\frac{dV}{V} \quad (34)$$

$$\Rightarrow \ln \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{f}{2}} = -\ln \left(\frac{V}{V_0} \right)^{-1} \quad (35)$$

wobei die Konstanten T_0 und V_0 über das Integrieren auf beiden Seiten als Integrationskonstante gemäß der Rechenregel in den Logarithmus gelangt sind.

Wenn man beide Seiten der Gleichung (35) in den Exponenten der Exponentialfunktion schreibt, ergibt sich eine erste Variante des Adiabatengesetzes für ideale Gase

$$T^{\frac{f}{2}}V = T_0^{\frac{f}{2}}V_0 = \text{const.} \quad (36)$$

Wiederum mit der Gasgleichung ersetzt man $T = \frac{PV}{nR}$ und stellt das gewohnte Adiabatengesetz mit $\tilde{c}_P = \tilde{c}_V + R$ und $\gamma := \frac{\tilde{c}_P}{\tilde{c}_V}$ fest:

$$\frac{P^{\frac{f}{2}}V^{\frac{f}{2}+1}}{nR} = \text{const.} \quad (37)$$

$$\Rightarrow PV^{\frac{\frac{f}{2}+1}{\frac{f}{2}}} = \text{const.} \quad (38)$$

$$\Rightarrow PV^\gamma = \text{const.} \quad (39)$$

6 Thermoskanne

Das Prinzip des Thermoskannenmodells ist in Abbildung 3 skizziert.

Die Oberfläche des Thermoskanneninneren und -äußeren A_{Zyl} sind wie in der Aufgabe angegeben näherungsweise gleich und ergeben sich aus der Geometrie von Kreis und Zylinder und A_q und h :

$$r = \sqrt{\frac{A_q}{\pi}} \approx 3.57 \text{ cm} \quad (40)$$

$$A_{Zyl} = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r h \approx 0.064 \text{ m}^2 \quad (41)$$

zu a):

Es kann kein Wärmetransport durch Konvektion stattfinden. Das ist durch das Modell eines soliden Aluminiumbehälters prinzipiell ausgeschlossen.

Durch Wärmeleitung gibt die Thermoskanne gemäß dem Fourierschen Gesetz Wärme in die Umgebung ab. Es lautet zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$\dot{Q}_{Leitung} = \lambda \frac{A}{d} (T_a - T_i) \approx -1.0 \text{ W} \quad (42)$$

Der Wärmetransport durch Strahlung ist kompliziert, da am Aluminium immer ein Teil r der Strahlung reflektiert wird und ein Teil ϵ absorbiert wird (Energieerhaltung und Nichttransparenz führen zur Forderung $r + \epsilon = 1$). Wir müssen nun *jeden* Wärmebeitrag, der vom Innern der Thermoskanne ausgeht oder dort ankommt durch eine Summation erfassen. Grundlage ist das Stefan-Boltzmann-Gesetz:

$$\dot{Q}_{Strahlung} = (\epsilon^2 \sigma A T_a^4 + \epsilon^2 (1 - \epsilon)^2 \sigma A T_a^4 + \epsilon^2 (1 - \epsilon)^4 \sigma A T_a^4 + \dots) \quad (43)$$

$$- (\epsilon^2 \sigma A T_i^4 + \epsilon^2 (1 - \epsilon)^2 \sigma A T_i^4 + \dots) \quad (44)$$

$$(45)$$

Diese unendliche Reihe kann mithilfe der expliziten Formel für die geometrische Reihe ($|q| < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$) wesentlich vereinfacht und exakt berechnet werden:

$$\dot{Q}_{Strahlung} = \epsilon^2 \sigma A \left(\sum_{k=0}^{\infty} (1 - \epsilon)^{2k} \right) (T_a^4 - T_i^4) \quad (46)$$

$$\Rightarrow \dot{Q}_{Strahlung} = \frac{\epsilon}{2 - \epsilon} \sigma A (T_a^4 - T_i^4) \approx -0.9 \text{ W} \quad (47)$$

Mit der Extensivität der Energie können wir die beiden Wärmeströme zu einem Gesamtwärmestrom aus dem System addieren, der das System um den Zeitpunkt $t = 0$ jede Sekunde verlässt.

$$\dot{Q}_{ges} = \dot{Q}_{Strahlung} + \dot{Q}_{Leitung} = -1.9 \text{ W} \quad (48)$$

zu b):

In allen Wärmetransportgesetzen ist implizit enthalten, dass der Wärmetransport pro Zeit kleiner wird, je kleiner die Temperaturdifferenz zwischen den zwei Reservoirs ist. Folglich erhalten wir aus unserem Modell eine *zu schnelle* Abkühlung, wenn wir annehmen, dass der \dot{Q}_{ges} des Zeitpunkts $t = 0$ für alle Zeiten so weiterfließt.

zu c):

Mit der Wärmekapazität von Wasser können wir die Wärmemenge berechnen, die abgeführt werden muss, damit der Tee auf $\vartheta = 40^\circ\text{C}$ abkühlt:

$$Q_{kalt} = m \cdot c_W \cdot (-40 \text{ K}) \approx -167200 \text{ J} \quad (49)$$

Wenn diese Wärmemenge vom Wärmestrom zum Zeitpunkt $t = 0$ abtransportiert würde, dauerte dies

$$\Delta t = \frac{Q_{kalt}}{\dot{Q}_{ges}} \approx 24.4 \text{ h} \quad (50)$$

zu d):

Die Erfahrung zeigt, dass man eine Thermoskanne nicht am einen Tag eingießen kann, dann einen ganzen Tag mit Nacht in der Kälte stehen lassen und daraus immer noch warmen Tee trinken kann. Reale Thermoskannen sind schlechter, zumal wir ja mit unserer Rechnung die Abkühlung sogar noch *überschätzt* haben müssten.

In der Tat zeigt sich hier die zentrale Schwäche unseres Modells: Unsere Thermoskanne hat keinen Deckel, und der spielt bei einem so genial abgeschirmten System natürlich eine große Rolle.

Er sorgt bei billigen Thermoskannen dafür, dass der Tee schon am Mittag des Skitages ziemlich lauwarm ist.

7 Solarherd

Der von der Sonne abgegebene Strahlungsfluss ist nach dem Stefan-Boltzmannschen Strahlungsgesetz

$$\dot{Q}_{\text{Sonne}} = \sigma A_S T_S^4 = \sigma \cdot \pi d_S^2 \cdot T_S^4 \quad (51)$$

Wegen der isotropen Abstrahlung ist die an der Erde ankommende Strahlungsintensität

$$I_{\text{Erde}} = \frac{\dot{Q}_{\text{Sonne}}}{4\pi L^2} \quad (52)$$

wobei $L = 8$ Lichtminuten der Abstand von Erde und Sonne ist. Da die Fläche A des Parabolspiegels extrem viel kleiner ist als $4\pi L^2$ gilt für den in den Parabolspiegel und damit im vereinfachten Modell auch für den in den Topf eingestrahlte Wärmestrom:

$$\dot{Q}_{\text{Topf}} = \frac{A}{4\pi L^2} \cdot \dot{Q}_{\text{Sonne}} \approx 1472.1 \text{ W} \quad (53)$$

Über die Wärmekapazität des Wassers im Topf wissen wir, wieviel Wärme wir dem Kilogramm Wasser zuführen müssen, um den gewünschten Temperaturanstieg von $\Delta T = 80 \text{ K}$ zu erreichen. Dies lässt sich mit dem zeitlich konstanten Wärmestrom auf eine Aufheizungszeit Δt umrechnen (letztlich erster Hauptsatz):

$$m_W \cdot c_W \cdot \Delta T = \dot{Q}_{\text{Topf}} \cdot \Delta t \quad (54)$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{m_W c_W}{\sigma \pi d_S^2 T_S^4} \cdot \frac{4\pi L^2}{A} \cdot \Delta T \approx 3 \text{ min } 46 \text{ s} \quad (55)$$

In der Realität wird es natürlich länger dauern, bis das Wasser kocht. Denn wie in der Aufgabe erwähnt, hat ein heißer Topf natürlich (wenn ein Deckel auf ihm ist sogar fast nur) Strahlungsverluste.

Hinzu kommt jedoch noch, dass wir einen zu hohen Strahlungsfluss in den Parabolspiegel angenommen haben, weil die (intakte) Erdatmosphäre UV-Strahlung sehr effizient absorbiert. Durch numerische Integration von Plancks Strahlungsformel kann man zeigen, dass die Sonne aber 12% ihrer Leistung im Ultravioletten ausstrahlt. Diese Leistung ist dann für unseren Solarherd sofort verloren.

8 Kaffee mit Milch

Um die durch den Wärmefluss erzeugte Entropie zu ermitteln, berechnen wir zuerst die Mischungstemperatur von Kaffee und Milch.

Da wir Milch und Kaffee als System ohne jegliche Außenwelt betrachten, findet nur ein Wärmeübertrag von der Milch in den Kaffee Q_{MK} und einer vom Kaffee in die Milch Q_{KM} statt. Es gilt der erste Hauptsatz in der Form

$$0 = \Delta U = Q = Q_{MK} + Q_{KM} \quad (56)$$

$$\Rightarrow m_K c_W (T_K - \bar{T}) = -m_M c_W (T_M - \bar{T}) \quad (57)$$

$$\Rightarrow \bar{T} = \frac{T_K m_K + T_M m_M}{m_K + m_M} \approx 346.2 \text{ K} \quad (58)$$

und wir erhalten die Mischungstemperatur \bar{T} , die den Wärmeübertrag $Q = Q_{KM} = -Q_{MK} \approx 14212 \text{ J}$ über (57) impliziert.

Um die Entropiezunahme beziehungsweise -abnahme berechnen zu können, modellieren wir den Temperaturangleichungsvorgang durch einen linearen Wärmefluss:

$$\dot{Q} = \frac{Q_{KM}}{\Delta t} \quad (59)$$

Wie man leicht überprüfen kann bedeutet ein solcher Wärmefluss für die Temperaturen von Milch und Kaffee während des Angleichungsprozesses ($0 < t < \Delta t$):

$$T_K(t) = \frac{\bar{T} - T_K}{\Delta t} \cdot t + T_K \quad (60)$$

$$T_M(t) = \frac{\bar{T} - T_M}{\Delta t} \cdot t + T_M \quad (61)$$

Damit ist nun auch alles bekannt, um die Entropieänderungen der beiden Teilsysteme während des Wärmeaustauschs mit dem zweiten Hauptsatz zu berechnen ($\dot{S} = \frac{\dot{Q}}{T}$ und Gleichung (59)), zuerst für das System „Kaffee“, dann für das System „Milch“.

$$\dot{S}_K(t) = -\frac{|Q|}{(\bar{T} - T_K) \cdot t + T_K \Delta t} \quad (62)$$

$$\Rightarrow \Delta S_K = \int_0^{\Delta t} \dot{S}_K(t) dt = -\frac{|Q|}{(\bar{T} - T_K)} \ln \frac{\bar{T}}{T_K} \quad (63)$$

$$\dot{S}_M(t) = \frac{|Q|}{(\bar{T} - T_M) \cdot t + T_M \Delta t} \quad (64)$$

$$\Rightarrow \Delta S_M = \int_0^{\Delta t} \dot{S}_M(t) dt = \frac{|Q|}{(\bar{T} - T_M)} \ln \frac{\bar{T}}{T_M} \quad (65)$$

$$(66)$$

Die Integrationen müssen zum Beispiel durch Integration durch Substitution gelöst werden. Mit der Extensivität der Entropie folgt für die Entropieänderung des Gesamtsystems

$$\Delta S = |Q| \cdot \left(\frac{\ln \frac{\bar{T}}{T_M}}{(\bar{T} - T_M)} - \frac{\ln \frac{\bar{T}}{T_K}}{(\bar{T} - T_K)} \right) \approx 5.6 \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad (67)$$

Man sieht, dass die Länge des Wärmeübertragungsvorganges für die Entropie keine Rolle spielt (schließlich ist Entropie eine Zustandsgröße und damit auch die Annahme des linearen Wärmetransports gerechtfertigt), und dass in Übereinstimmung mit dem zweiten Hauptsatz und der Befürchtung des Studenten die Entropie der Welt durch die Herstellung des Milchkaffees *größer* wird.

Der Student hat bei dieser quantitative Rechnung nicht bedacht, dass auch das Vermischen zweier verschiedener Flüssigkeiten ein irreversibler Vorgang ist, der nach dem zweiten Hauptsatz auch Entropie erzeugt - vielleicht sogar noch mehr als die Temperaturangleichung!

Das einzige was wir also gezeigt haben, ist, dass bei der Milchkaffeeherstellung $\Delta S > 5.6 \frac{\text{J}}{\text{K}}$ ist.

9 Dieselmotor

Die Teilprozesse des Dieselmotors sind im $P - V$ -Diagramm in Abbildung 4 dargestellt.

zu a):

Im ersten Teilprozess, der adiabatischen Kompression, folgt der Druck P_2 aus dem Adiabatenengesetz für Luft („zweiatomig“, $\gamma \approx \frac{7}{5}$):

$$P_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma \cdot P_1 \approx 21^{\frac{7}{5}} \cdot 1.013 \text{ bar} \approx 71.92 \text{ bar} \quad (68)$$

Die Adiabatenbeziehung für die Temperatur ($TV^{\gamma-1} = \text{const.}$) liefert

$$T_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \cdot T_1 \approx 973.38 \text{ K} \quad (69)$$

Beim nächsten Schritt ist $T_3 = 2273 \text{ K}$ in der Aufgabe bereits direkt gegeben, und $P_3 = P_2 = 71.92 \text{ bar}$, weil das Erhitzen isobar verläuft. Für das Volumen V_3 folgt nach dem Gesetz von Gay-Lussac ($P = \text{const.}$):

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{T_3}{T_2} \quad (70)$$

Die isochore Abkühlung im Schritt vier impliziert $V_4 = V_1$. Damit und mit (70) können wir den dritten Schritt, die adiabatische Expansion, bewältigen:

$$P_4 = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^\gamma \cdot P_3 = \left(\frac{V_3}{V_2} \cdot \frac{V_2}{V_4}\right)^\gamma \cdot P_3 = \left(\frac{T_3}{T_2} \cdot \frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma \cdot P_3 \approx 3.32 \text{ bar} \quad (71)$$

$$T_4 = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1} \cdot T_3 = \left(\frac{T_3}{T_2} \cdot \frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} \cdot T_3 \approx 944.14 \text{ K} \quad (72)$$

$$(73)$$

zu b):

In a) hatten wir bereits gesehen:

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{T_3}{T_2} \approx 2.34 \quad (74)$$

Damit haben wir die Aufgabe schon gelöst.

zu c):

Da für jeden Kreisprozess $\Delta U = 0$ gilt, vereinfacht sich der thermische Wirkungsgrad η :

$$\eta = \frac{W_{\text{ges}}}{Q_{\text{ein}}} = \frac{Q_{\text{ein}} + Q_{\text{aus}}}{Q_{\text{ein}}} = 1 + \frac{Q_{\text{aus}}}{Q_{\text{ein}}} \quad (75)$$

Diese Form ist in diesem Fall nützlicher, da es nur einen Prozess mit Wärmezufuhr und einen mit Wärmeabfuhr gibt.

Für den isobaren Prozess gilt (Wärmezufuhr)

$$Q_{\text{ein}} = n \cdot \tilde{c}_P \cdot (T_3 - T_2) \quad (76)$$

und für den isochoren (Wärmeabfuhr)

$$Q_{aus} = n \cdot \tilde{c}_V \cdot (T_1 - T_4) \quad (77)$$

Damit haben wir eine für uns ausreichende Darstellung des Wirkungsgrads gefunden (wir kennen alle vier Temperaturen):

$$\eta = 1 + \frac{n \cdot \tilde{c}_V \cdot (T_1 - T_4)}{n \cdot \tilde{c}_P \cdot (T_3 - T_2)} = 1 - \gamma^{-1} \cdot \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \approx 0.64 \quad (78)$$

zu d):

Für den Carnotwirkungsgrad müssen wir die höchste Temperatur $T_h = 2273 \text{ K}$ und die niedrigste $T_n = 288 \text{ K}$ einsetzen:

$$\eta_C = 1 - \frac{T_n}{T_h} \approx 0.87 \quad (79)$$

Der ideale Carnotprozess ist also in der Tat deutlich effizienter als ein idealisierter Dieselmotor bei der selben Temperaturspanne.

10 Ottomotor

Der Ottomotor-Vergleichskreisprozess besteht aus einer adiabatischen Kompression (Verdichtung), isochoren Erhitzung (Verbrennung), adiabatischen Expansion (Arbeit an der Welle) und einer isochoren Abkühlung. Er ist in Abbildung 5 im $P - V$ -Diagramm dargestellt.

Wieder verwenden wir für den thermischen Wirkungsgrad η die geschickte Darstellung:

$$\eta = \frac{W_{ges}}{Q_{ein}} = \frac{Q_{ein} + Q_{aus}}{Q_{ein}} = 1 + \frac{Q_{aus}}{Q_{ein}} \quad (80)$$

Die Wärme Zu- und Abfuhr geschieht in den isochoren Teilprozessen. Dort wird keine Volumenarbeit verrichtet ($W = 0$) und Wärme gemäß der Wärmekapazität bei konstantem Volumen (c_V) zugeführt

$$Q_{ein} = n \cdot \tilde{c}_V \cdot (T_3 - T_2) \quad (81)$$

$$Q_{aus} = n \cdot \tilde{c}_V \cdot (T_1 - T_4) \quad (82)$$

Damit folgt η unmittelbar aus der geeigneten Darstellung (80)

$$\eta_{Otto} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \quad (83)$$

Diese Darstellung kann in eine noch aussagekräftigere Form gebracht werden, wenn man das *Verdichtungsverhältnis* $\epsilon = \frac{V_1}{V_2}$ definiert. Dies ist sinnvoll, da während des gesamten Otto-Prozesses nur zwei verschiedene Volumina auftreten ($V_3 = V_2$, $V_4 = V_1$).

Das Gesetz mithilfe dessen die Umformulierung von 83 gelingt, ist das Adiabatengesetz $PV^\gamma = \text{const.}$ beziehungsweise hier in der Form $TV^{\gamma-1} = \text{const.}$.

Mit ihm und den Identitäten $V_3 = V_2$ und $V_4 = V_1$ wird η_{Otto} zu

$$\eta_{Otto} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} T_3 - T_1}{T_3 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} T_1} = 1 - \frac{\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} \cdot \left(T_3 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} T_1\right)}{T_3 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} T_1} \quad (84)$$

$$\Rightarrow \eta_{Otto} = 1 - \epsilon^{1-\gamma} \quad (85)$$

Man sieht daran: Je höher das Verdichtungsverhältnis ϵ ist, desto effizienter ist der Motor. Leider werden der Verdichtung in der Realität durch die Gefahr einer Selbstentzündung des Benzin-Luft-Gemisches Grenzen gesetzt („Klopfen“).

Die Oktanzahl von Benzin gibt letztlich die Klopfestigkeit des Kraftstoffs an und bestimmt so, bis zu welchem Verdichtungsverhältnis komprimiert werden darf.

Deshalb brauchen hochgezüchtete Motoren hohe Oktanzahlen (früher verbleites Benzin).

11 Klimaanlage

Da der Carnotprozess ein Kreisprozess ist, gilt $\Delta U = 0$ nach einem Umlauf. Dies führt mit dem ersten Hauptsatz zu

$$\Delta U = 0 = Q_{ein} + Q_{aus} - W_{ges} \quad (86)$$

Also reicht es Q_{ein} und Q_{aus} zu berechnen, um die Leistungsziffern zu ermitteln.

Es gilt mit dem zweiten Hauptsatz und der Tatsache, dass die Wärme im $T-S$ -Diagramm die Fläche unter der Kurve ist (siehe Abbildung 6):

$$Q_{aus} = \int_{S_h}^{S_n} T dS = T_h \cdot (S_n - S_h) \quad (87)$$

$$Q_{ein} = \int_{S_n}^{S_h} T dS = T_n \cdot (S_h - S_n) \quad (88)$$

$$\Rightarrow W_{ges} = (T_n - T_h) \cdot (S_h - S_n) \quad (89)$$

Daran, dass $W_{ges} < 0$ sieht man, dass beim linksläufigen Carnotprozess netto Arbeit verrichtet werden muss.

Mit den Definitionen der Leistungsziffern und den angegebenen Temperaturen folgt

$$\epsilon = \frac{Q_{aus}}{W_{ges}} = \frac{T_h}{T_h - T_n} = 9.9 \quad (90)$$

$$\epsilon_0 = -\frac{Q_{ein}}{W_{ges}} = \frac{T_n}{T_h - T_n} = 19.9 \quad (91)$$

Daran sieht man zum Beispiel, dass eine ideale Wärmepumpe zehnmal weniger Arbeit verschlingt als zum Beispiel eine elektrische Heizung. Die dafür benötigte Energie kommt gemäß dem ersten Hauptsatz nicht aus dem Nichts, sondern aus der bereits kalten Umgebung.

Die mit ϵ_0 charakterisierte „Sommer-Klimaanlage“ führt zwanzigmal mehr Wärme aus dem Zimmer ab, als man Arbeit in sie hereinstecken muss.

12 Geschwindigkeit von Gasmolekülen

Aus dem Gleichverteilungssatz der statistischen Mechanik folgt, dass jedes Gasmolekül im Mittel die kinetische Energie $\bar{E} = \frac{3}{2}k_B T$ hat (drei Translationsfreiheitsgrade). Also gilt:

$$\bar{E}_{kin} = \frac{3}{2}k_B T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 \quad (92)$$

Die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit v_{rms} ergibt sich daraus unkompliziert als

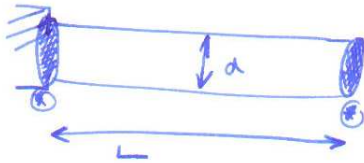
$$v_{rms} = \sqrt{3\frac{k_B T}{m}} = \sqrt{3\frac{RT}{M_{mol}}} \quad (93)$$

mit der molaren Masse M_{mol} des Gases. Durch Einsetzen von $M_{H_2} = 2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$ und $M_{Hg} = 200.6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$ folgen die Geschwindigkeiten

$$\bar{v}_{rms_{H_2}} = 1911 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (94)$$

$$\bar{v}_{rms_{Hg}} = 191 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (95)$$

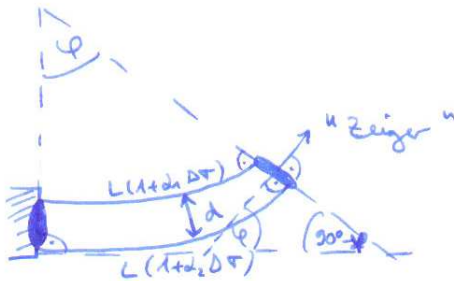
$\vartheta_0 = 0^\circ \text{C}$:



⊕: Fixierung des Strahles

Nicht materialbezogen;
 $L \gg d$!

$\vartheta > \vartheta_0$



$(\alpha_2 > \alpha_1)$

Abstand d überall gleich
 \Rightarrow Kreisbogen mit Winkel φ

Abbildung 1: Skizze zur Funktionsweise eines Bimetallthermometers mit den relevanten geometrischen Größen bei $\vartheta = 0^\circ \text{C}$ und nach einer Temperaturänderung ΔT

Situation vor dem Vermischen der Gase:

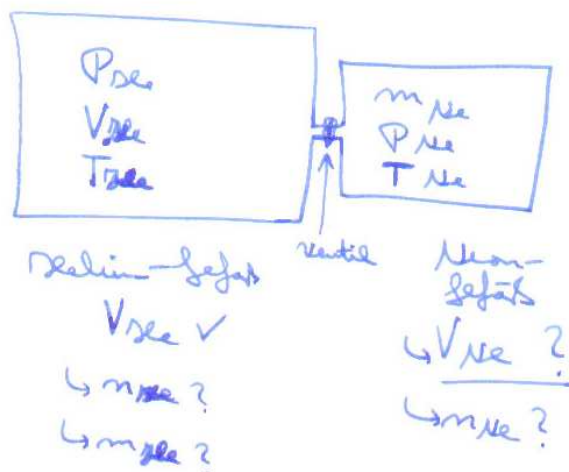
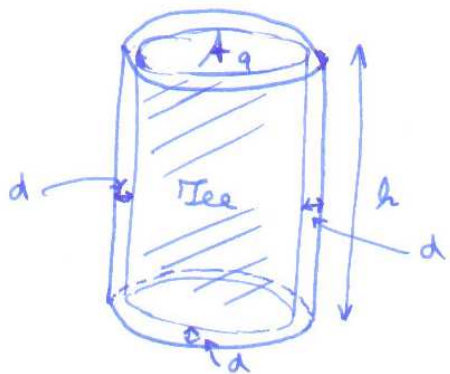


Abbildung 2: Prinzipskizze zum Gasvermischungsexperiment mit den Zustandsgrößen der beiden Gase vor dem Vermischen

Prinzip des Demodaman - Modells:



$$A_g = 40 \text{ cm}^2$$

$$h = 25 \text{ cm}$$

$$d = 0,5 \text{ cm}$$

der äußere Zylinder habe
"überall" den Abstand d
von innen

$$A_{\text{Zylinder}} = 2 \cdot \underbrace{\pi r^2}_{A_g} + 2 \pi r \underbrace{h}_{\sqrt{\frac{40 \text{ cm}^2}{\pi}}} = 0,064 \text{ m}^2$$

Reflektion der Strahlung an den in Natur parallelen Wänden:

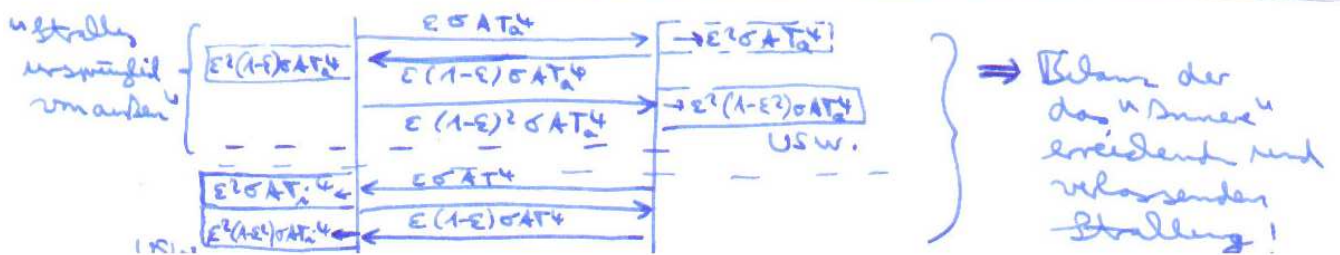
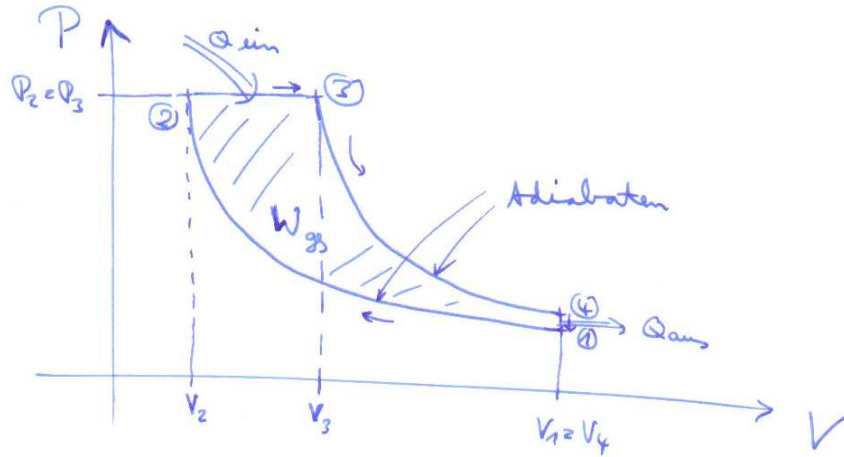


Abbildung 3: Prinzipskizze der Geometrie des Thermoskannenmodells mit den relevanten Größen und einer Prinzipskizze zur Herleitung der abgestrahlten Wärme

P-V-Diagramm des Diesel-Vergleichsprozesse:

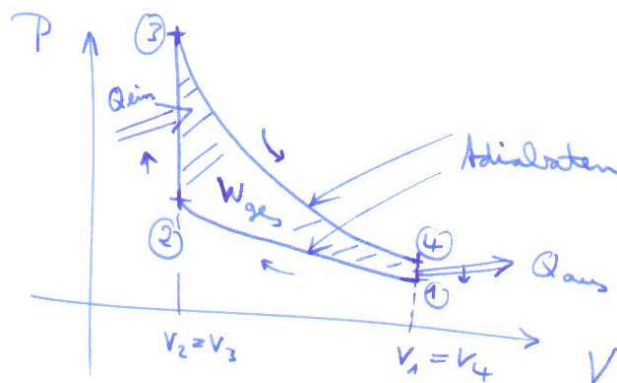


gegeben, $T_1, P_1, \frac{V_1}{V_2}, T_3$

gesucht, $T_2, P_2, P_3, P_4, T_4, \eta = \frac{W_{ges}}{Q_{ein}}, \frac{V_3}{V_2}$

Abbildung 4: Der Vergleichsprozess eines Dieselmotors im $P - V$ -Diagramm

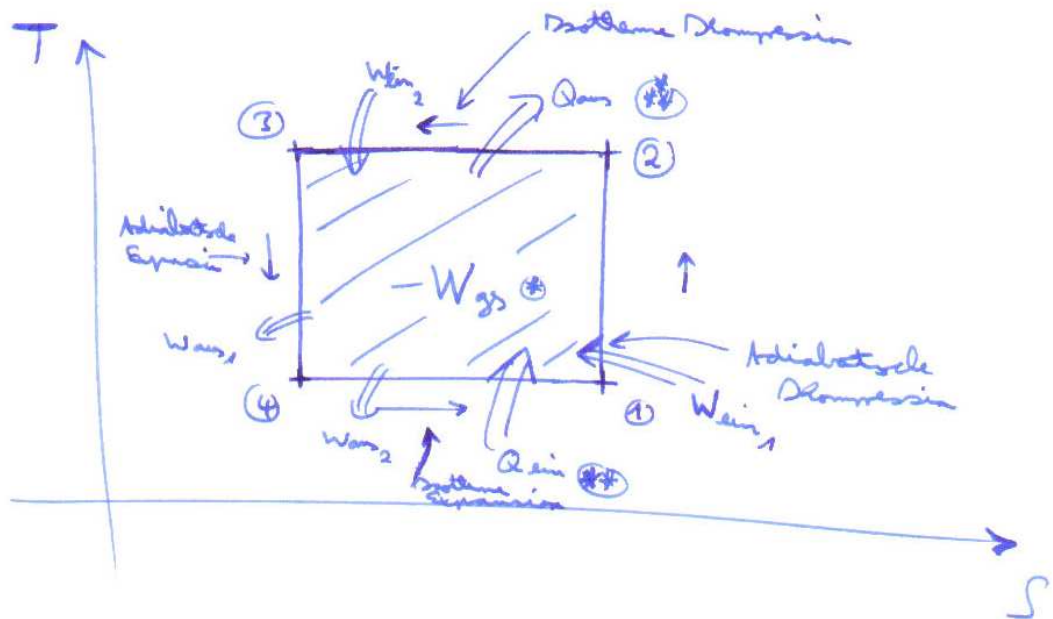
P-V-Diagramm des Otto-Vergleichsprozesse:



Verdichtungsverhältnis $\epsilon = \frac{V_1}{V_2}$

Abbildung 5: Der Vergleichsprozess eines Ottomotors im $P - V$ -Diagramm

T-S-Diagramm des Carnotprozesses (linksläufig):



⊛ soll bei allen linksläufig Prozesse möglichst klein sein

⊛⊛ soll bei einer Kältemaschine maximal werden

$$\Rightarrow \epsilon_o := z - \frac{Q_{\text{ein}}}{W_{\text{ges}}} \quad (\text{Leistungsziffer KM})$$

⊛⊛⊛ soll bei einer Wärmepumpe maximal werden

$$\Rightarrow \epsilon := z \frac{Q_{\text{aus}}}{W_{\text{ges}}} \quad (\text{Leistungsziffer WP})$$

Abbildung 6: Der Vergleichsprozess einer idealen Wärmepumpe/Kältemaschine (linksläufiger Carnotprozess) im T-S-Diagramm