

Ferienkurs zur Quantenmechanik 1

T. Heidsieck

Blatt 2

WiSe 07/08

C. Paleani

1 : Kugelflächenfunktionen und Drehimpulsoperatoren

Wir wollen in dieser Aufgabe die Auf- und Absteigeoperatoren ein wenig genauer ansehen und sie im Operatorformalismus betrachten.

(a) Es gilt $L_3 Y_{lm} = \hbar m Y_{lm}$, sowie $L^2 Y_{lm} = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}$. Zeigen Sie für $L_{\pm} := L_{\pm} \pm iL_2$ die Relation $L_{\pm} Y_{lm} \propto Y_{lm \pm 1}$ und berechnen Sie die Normierungskonstante. Bestimmen Sie hierzu

(i) folgende Kommutatoren: $[L^2, L_{\pm}]$, sowie $[L_3, L_{\pm}]$ und beweisen Sie davon ausgehend die Behauptung,

(ii) sowie die Norm des Zustands $L_{\pm} Y_{lm}$. Schliessen Sie hieraus auf die gesuchte Normierungskonstante.

(b) Drücken Sie L_1 und L_2 über L_{\pm} aus und untersuchen Sie, wie $L_{1,2}$ auf Y_{lm} wirkt.

2 : Orthonormierung der Eigenfunktionen von L_3

Sei $f_m(\phi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}$. Zeigen Sie $\int_0^{2\pi} d\phi f_m(\phi)^* f_{m'}(\phi) = \delta_{mm'}$

3 : Streuung am Delta Potential

Betrachten Sie die eindimensionale Schrödingergleichung mit dem attraktiven δ -Potential

$$V(x) = V_0 \delta(x) \quad \text{mit } V_0 = -\frac{\hbar^2 \kappa}{m} < 0$$

Berechnen Sie die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten R und T für die Streuung am Potential ($E > 0$). Was ergibt sich für $|R|^2 + |T|^2$? Skizzieren Sie die Transmissionswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Energie.

4 : Potentialwall (Θ Potential)

In dieser Aufgabe betrachten wir einen Potentialwall. Das Potential habe die Form

$$V(x) = V_0 \Theta(a - |x|)$$

Die Welle falle von links ein. Die Energie ist $E > 0$ aber kann größer oder kleiner V_0 sein.

(a) Wie lautet die Schrödinger Gleichung? Geben Sie die Lösungen in den drei Bereichen an.

(b) Welche Randbedingungen müssen erfüllt sein? Welche Annahmen können Sie über die einfallende und die von rechts kommende Welle machen?

(c) Benutzen Sie die Randbedingungen um die Amplituden zu bestimmen!

(d) Wie ist die Stromdichte definiert?

(e) Wie ist der Transmissionskoeffizient definiert? Welche Aussage können Sie über den Reflektionskoeffizienten machen?

(f) Bestimmen Sie die Ströme j_{ein} und j_{trans} . (Einfallender und transmittierter Strom)

(g) Berechnen Sie T, R . Stellen Sie T in Abhängigkeit von $\frac{V}{E}$ dar. Was passiert für $\frac{V}{E} > 1$?

5 : Fortsetzung zum Potentialtopf mit einer undurchlässigen Wand

Wir betrachten abermals das Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ -V_0 & 0 < x < L \\ 0 & x > a \end{cases}$$

Diesmal interessieren wir uns aber für den Fall $E > 0$.

- (a)** Gebe die Schrödinger Gleichung und die Lösungen für $E > 0$ an.
- (b)** Die Welle falle von rechts ein, welche Annahmen können wir machen? Welche Randbedingungen gelten?
- (c)** Nutzen Sie die Randbedingungen, um die Amplituden zu bestimmen.
- (d)** Bestimmen Sie den Reflektionskoeffizienten.
- (e)** Betrachten sie den Übergang bei $x = L$ berechnen Sie das Verhältnis der Beträge von j_t und j_e . Stellen Sie das Verhältnis in Abhängigkeit von $k_I L$ graphisch dar. Warum steht das Ergebnis nicht im Widerspruch zur Stromerhaltung?