Inhaltsverzeichnis

1. Gewöhnliche Differentialgleichungen

1.1. Lineare DGL-Systeme

1.1.1. Allgemeines

Definition 1 (Lineare Differentialgleichungssysteme) *Sei* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$, $\mathbf{A} : I \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ *und* $\vec{b} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *Ein Differentialgleichungssystem (DGL-System) heißt* ***linear****, wenn sie sich in folgender Form darstellen lässt:*

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{A}(t)\vec{x} + \vec{b}(t) \tag{1.1}$$

Das System heißt ***homogen****, wenn* $\vec{b}(t) = \vec{0}$*, ansonsten* ***inhomogen****.*

Bemerkung 1 *Eine DGL n-ter Ordnung der Form*

$$x^{(n)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t) = b(t) \tag{1.2}$$

lässt sich immer in ein $n \times n$*-DGL-System erster Ordnung umschreiben.*

Satz 1 (Lösungsraum des homogenen Systems)

1. *Die Lösungsmenge des linearen homogenen DGL-Systems (mit i.a. variablen Koeffizienten)*

   $$\mathbb{L} := \left\{\vec{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \dot{\vec{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\vec{x}(t), t \in I\right\} \tag{1.3}$$

   ist ein ***n dimensionaler*** $\mathbb{R}$***-Vektorraum***

2. *n Lösungen (als Spalten einer* $n \times n$*-Matrix)* $\mathbf{W}(t) = (\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t))$ *bilden genau dann eine* ***Basis des Lösungsraums (Fundamentalsystem)****, wenn* $\forall t \in I$ *die* WRONSKI*-Determinante* $w(t) = \det(\mathbf{W}(t)) \neq 0$ *ist. In diesem Fall ist*

   $$\vec{x}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + \cdots + c_n\vec{x}_n(t), \qquad c_i \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

   die ***allgemeine und vollständige*** *Lösung des DGL-Systems* $\dot{\vec{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\vec{x}(t)$. $\mathbf{W}(t)$ *heißt* WRONSKI*-Matrix und erfüllt* $\dot{\mathbf{W}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{W}(t)$.

Satz 2 (Lösung des inhomogenen Systems und Superpositionsprinzipien)

1. *Die allgemeine Lösung des inhomogenen DGL-Systems (1.1) ist gegeben durch*

   $$\vec{x}(t) = \vec{x}_h(t) + \vec{x}_p(t) \tag{1.5}$$

   wobei $\vec{x}_h(t)$ *die* ***allgemeine*** *Lösung des* ***homogenen*** *DGL-Systems und* $\vec{x}_p(t)$ ***eine spezielle*** *Lösung des* ***inhomogenen*** *Systems ist.*

Lösungsverfahren 1 (Lösung von $\dot{\vec{x}} = \mathbf{A}\vec{x}$ mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$)

1. *Schritt: Eigenwerte und deren Vielfachheiten berechnen:*
   - *Berechnen der Nullstellen des charakteristischen Polynoms* $P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}) \Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_r$
   - *Linearfaktorenzerlegung:* $P(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{a_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_r)^{a_r}$
   - *Die algebraische Vielfachheit von* λ_i *ist* a_i.
2. *Schritt: Bestimmung einer Basis* $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ *des* $\mathbb{C}^n$ *aus Eigen- und Hauptvektoren von* $\mathbf{A}$
   - *Bestimme eine maximale Menge aus linear unabhängigen Eigenvektoren durch Lösen der Gleichungssysteme* $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{1}|\vec{0})$, $i \in \{1, \dots, r\}$
   - *Bestimme die geometrische Vielfachheit* $g_i = \dim Kern(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{1})$ *der Eigenwerte* λ_i.
   - ***Häufiger Spezialfall:*** *Ist* $\forall i \in \{1, \dots, r\}$: $a_i = g_i$ *so lassen sich* n *linear unabhängige Eigenvektoren bestimmen.*
   - *Hat* $\mathbf{A}$ *ein Paar komplex konjugierte Eigenwerte* $\lambda, \overline{\lambda}$, *so muss das oben genannte Gleichungssystem nur für* λ *gelöst werden. Sei* $\vec{v}$ *Eigenvektor zum Eigenwert* λ, *so ist* $\overline{\vec{v}}$ *Eigenvektor zum Eigenwert* $\overline{\lambda}$.
   - *Ist für ein i* $a_i \neq g_i$ *so muss für* λ_i *Hauptvektoren höherer Stufe bestimmt werden. Dabei heißt* $\vec{h}_{i,l}$ *Hauptvektor der Stufe l, wenn* $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{1})^l\vec{h}_{i,l} = \vec{0}$ *und* $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{1})^{l-1}\vec{h}_{i,l} \neq \vec{0}$
   - ***Häufiger Spezialfall:*** λ_i *ist Eigenwert mit* $a_i = k$ *und* ***ein****dimensionalem Eigenraum. In diesem Fall kann die Hauptvektorkette (nicht immer eindeutig!) rekursiv berechnet werden durch Lösung der Gleichungssysteme: (Dabei ist* $\vec{h}_{i,1} := \vec{v}_i$ *der Eigenvektor)*

     $$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1})\vec{h}_{i,1} = \vec{0}, \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1})\vec{h}_{i,2} = \vec{h}_{i,1}, \quad \dots, \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1})\vec{h}_{i,k} = \vec{h}_{i,k-1}$$
3. *Schritt: Bestimmung des Lösungsfundamentalsystems*
   - *Für jeden Hauptvektor* $\vec{v}_i$ *eine Lösung* $\vec{x}_i = e^{\mathbf{A}t}\vec{v}_i$ *berechnen.*
   - *Sei* $\vec{v}$ *ein Hauptvektor der Stufe* m *zum Eigenwert* λ, *so ist*

     $$\vec{x} = e^{\mathbf{A}t}\vec{v} = e^{\lambda t}\left[\vec{v} + t(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1})\vec{v} + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1})^{m-1}\vec{v}\right]$$
   - $\mathbf{W}(t) = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ *ist dann die* WRONSKI-*Matrix.*
   - ***Häufiger Spezialfall:*** $\mathbf{A}$ *hat eine Basis* $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ *aus Eigenvektoren* $\Rightarrow$ *ein Fundamentalsystem lautet:*

     $$\mathbf{W}(t) = (e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1, \dots, e^{\lambda_n t}\vec{v}_n)$$
   - ***Häufiger Spezialfall:*** λ_i *ist ist Eigenwert mit* $a_i = k$ *und* ***ein****dimensionalem Eigenraum* $\Rightarrow$ *zugehörige Lösungen lauten:*

     $$\vec{x}_1(t) = e^{\lambda_i t}\vec{h}_{i,1}, \quad \vec{x}_2(t) = e^{\lambda_i t}(\vec{h}_{i,2} + t\vec{h}_{i,1}), \dots, \vec{x}_k(t) = e^{\lambda_i t}\left(\vec{h}_{i,k} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\vec{h}_{i,1}\right)$$
   - *Hat* $\mathbf{A}$ *ein Paar komplex konjugierte Eigenwerte* $\lambda, \overline{\lambda}$ *mit den Eigenvektoren* $\vec{v}$ *bzw.* $\overline{\vec{v}}$, *so lauten die zugehörigen* ***reellen*** *Lösungen:*

     $$\vec{x}_1 = Re(e^{\lambda t}\vec{v}) \qquad \vec{x}_2 = Im(e^{\lambda t}\vec{v})$$

Inhomogene Systeme

Bei inhomogenen Systemen

$$\dot{\vec{x}}(t) = \mathbf{A}\vec{x}(t) + \vec{b}(t) \tag{1.15}$$

muss neben der allgemeinen Lösung des homogenen Systems $\vec{x}_h$ noch eine partikuläre Lösung $\vec{x}_p$ des inhomogenen Systems bestimmt werden. Dabei führt die Methode der Variation der Konstanten im allgemeinen immer zum Ziel:

Lösungsverfahren 2 (Lösung des AWP inhomog. Systeme durch Variation der Konstanten)

1. *Schritt: Bestimme für das homogene System $\dot{\vec{x}}(t) = \mathbf{A}\vec{x}(t)$ ein Fundamentalsystem $\mathbf{W}(t)$.*
2. *Schritt: Löse $\vec{b}(t) = \mathbf{W}(t)\dot{\vec{c}}(t)$ durch Bestimmung einer Stammfunktion von $\dot{\vec{c}}$.*
3. *Schritt: Eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems ist dann: $\vec{x}_p(t) = \mathbf{W}(t)\vec{c}(t)$*

   da $\dot{\vec{x}}_p = \dot{W}\vec{c} + W\dot{\vec{c}} \overset{!}{=} AW\vec{c} + \vec{b}$ wegen $\dot{W} = AW$

   $\Rightarrow W\dot{\vec{c}} = \vec{b}$ da Spalten von W Lösungen von $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$
4. *Schritt: Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems ist*

$$\vec{x}(t) = \mathbf{W}(t)\vec{c} + \vec{x}_p(t) \qquad \vec{c} \in \mathbb{C}^n \tag{1.16}$$

5. *Schritt: Einsetzen der Anfangswertbedingung in (1.16) liefert ein Gleichungssystem für $\vec{c}$.*

Diese Methode funktioniert auch für nicht konstante $\mathbf{A}(t)$. Für bestimmte Inhomogenitäten $\vec{b}(t)$ führt im Falle konstanter $\mathbf{A}$ ein Störgliedansatz schneller zu einer geeigneten partikulären Lösung.

Lösungsverfahren 3 (Störgliedansatz für die partikuläre Lösung)

1. *Schritt: Versuche, die Inhomogenität $\vec{b}(t)$ in eine Summe zu zerlegen, um das reelle Superpositionsprinzip (1.7) anzuwenden.*
2. *Schritt: Summanden der Form*

$$(\vec{d}_m t^m + \cdots + \vec{d}_1 t + \vec{d}_0)e^{\mu t} \qquad \mu \in \mathbb{C}, \vec{d}_i \in \mathbb{C}^n \tag{1.17}$$

   identifizieren. Eventuell ist eine Komplexifizierung (1.8) notwendig.
3. *Schritt: Eigenwerte und deren algebraische Vielfachheiten von $\mathbf{A}$ betrachten.*
4. *Schritt: Ansatz für die partikuläre Lösung bei einem Störglied der Form (1.17) ist:*
   - $(\vec{c}_m t^m + \cdots + \vec{c}_1 t + \vec{c}_0)e^{\mu t}$ $\quad \mu \in \mathbb{C}, \vec{c}_i \in \mathbb{C}^n$, *falls μ kein Eigenwert von $\mathbf{A}$ ist.*
   - $(\vec{c}_{m+k} t^{m+k} + \cdots + \vec{c}_1 t + \vec{c}_0)e^{\mu t}$ $\quad \mu \in \mathbb{C}, \vec{c}_i \in \mathbb{C}^n$, *falls μ k-facher Eigenwert von $\mathbf{A}$ ist. (Resonanzfall)*

Beispiel 2 *(RR'05) Man berechne die Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{\vec{x}}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \vec{x}(t) + \underbrace{e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{b}(t)}, \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. ***Reelle Superposition:*** *Seien $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ Lösungen von*

$$\dot{\vec{u}}_1 = \mathbf{A}(t)\vec{u}_1 + \vec{b}_1(t) \quad \textit{bzw.} \quad \dot{\vec{u}}_2 = \mathbf{A}(t)\vec{u}_2 + \vec{b}_2(t) \tag{1.6}$$

so gilt: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\vec{x} = \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2$ Lösung von

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{A}(t)\vec{x} + (\alpha\vec{b}_1(t) + \beta\vec{b}_2(t)) \tag{1.7}$$

3. ***Komplexifizierung:*** *Seien $\mathbf{A} : I \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$, $\vec{g}, \vec{h} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ und die Lösungen $\vec{u}, \vec{v}$ erfüllen:*

$$\dot{\vec{u}} = \mathbf{A}(t)\vec{u} + \vec{g}(t) \quad \textit{bzw.} \quad \dot{\vec{v}} = \mathbf{A}(t)\vec{v} + \vec{h}(t)$$

dann erfüllt $\vec{x} = \vec{u} + i\vec{v}$ die DGL

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{A}(t)\vec{x} + (\vec{g}(t) + i\vec{h}(t)) \tag{1.8}$$

1.1.2. Anfangswertprobleme linearer DGL-Systeme mit konstanten Koeffizienten

In vielen Fällen hat man (in Klausuren und Übungsaufgaben) mit linearen DGL-Systemen mit konstanten Koeffizienten zu tun. Diese haben die allgemeine Form:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \mathbf{A}\vec{x}(t) + \vec{b}(t) \tag{1.9}$$

mit einer konstanten Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Von einem **Anfangswertproblem** sprechen wir, wenn $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ vorgegeben ist.

Homogene Systeme

Satz 3 *Das homogene lineare DGL-System mit konstanten Koeffizienten*

$$\dot{\vec{x}}(t) = \mathbf{A}\vec{x}(t) \tag{1.10}$$

hat die allgemeine Lösung

$$\vec{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\vec{c}, \quad \vec{c} \in \mathbb{R}^n \tag{1.11}$$

Dabei ist für eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$e^{\mathbf{A}} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k \tag{1.12}$$

die ***Matrix-Exponentialfunktion.*** *Mit jeder invertierbaren Matrix $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist*

$$\mathbf{W}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{C} \tag{1.13}$$

ein Fundamentalsystem von (1.10) (insbesondere für $\mathbf{C} = \mathbf{T}\vec{c}$, $\vec{c} \in \mathbb{C}^n$ und $\mathbf{T}$ mit Spalten bestehend aus einer Basis aus Hauptvektoren von $\mathbf{A}$). Die formale Lösung des Anfangswertproblems $\dot{\vec{x}}(t) = \mathbf{A}\vec{x}(t)$ mit $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ lautet

$$\vec{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\vec{x}_0 \tag{1.14}$$

Unter Benutzung von einigen nützlichen **Rechenregeln** lässt sich die Matrix-Exponentialfunktion und somit die Lösung des DGL-Systems schnell direkt berechnen.

Wichtige Rechenregeln zur Berechnung von e^{A}:

1. Diagonalmatrix:

$$\exp\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n}\end{pmatrix}$$

2. Blockstruktur

$$e^{\begin{pmatrix}\boxed{A} & \\ & \boxed{B}\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}e^{\boxed{A}} & \\ & e^{\boxed{B}}\end{pmatrix}$$

3. Summe aus vertauschbaren Matrizen

$$A\cdot B = B\cdot A \quad\Rightarrow\quad e^{A+B} = e^{A}\cdot e^{B}$$

4. Nilpotente Matrix:

$$\exists\, m \in \mathbb{N}: \quad A^m = 0 \;,\; A^{m-1} \neq 0$$

$$\Rightarrow e^{A} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} A^k \quad \ldots \text{ endliche Summe}$$

Mit diesen Regeln lässt sich z.B. das folgende Anfangswertproblem leicht lösen:

Beispiel 1 *(RR'06) Man berechne die Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\vec{x}(t) \qquad \vec{x}(0) = \vec{x}_0$$

Wir wenden nacheinander die Regeln 2, 1, 3 und 4 an:

$$\exp\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}t = \begin{pmatrix}\exp\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}t & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\\ 0 \quad 0 & e^{2t}\end{pmatrix}$$

$$\exp\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]t = \begin{pmatrix}e^t & 0\\ 0 & e^t\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}t + 0 \ldots\right]$$

$$= \begin{pmatrix}e^t & 0\\ 0 & e^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^t & te^t\\ 0 & e^t\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{x}(t) = \begin{pmatrix}e^t & te^t & 0\\ 0 & e^t & 0\\ 0 & 0 & e^{2t}\end{pmatrix}\vec{x}_0}}$$

Ist die direkte Berechnung nicht möglich, so führt folgende Vorgehensweise zum Ziel.

Wir bestimmen zuerst die allgemeine Lösung des homogenen DGL-Systems $\dot{\vec{x}}_h(t) = \mathbf{A}\vec{x}_h(t)$ *nach Lösungsverfahren 1:*

1. *Schritt: Eigenwerte und deren Vielfachheiten berechnen:*
   - *Berechnen der Nullstellen des charakteristischen Polynoms* $P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}) \Rightarrow \lambda_1, \ldots, \lambda_r$
   - *Linearfaktorenzerlegung:* $P(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{a_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_r)^{a_r}$
   - *Die algebraische Vielfachheit von* λ_i *ist* a_i.

$$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & -\lambda & 4 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Entw. nach 1. Zeile}}}{=} (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} -\lambda & 4 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda\,(2-\lambda)^2$$

Eigenwert	algebr. Vielfachheit
$\lambda_1 = 0$	$a_1 = 1$
$\lambda_{2,3} = 2$	$a_2 = 2$

2. *Schritt: Bestimmung einer Basis* $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ *des* $\mathbb{C}^n$ *aus Eigen und Hauptvektoren von* $\mathbf{A}$
   - *Bestimme eine maximale Menge aus linear unabhängigen Eigenvektoren durch Lösen der Gleichungssysteme* $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{1}|\vec{0})$, $i \in \{1, \ldots, r\}$
   - *Bestimme die geometrische Vielfachheit* $g_i = \dim Kern(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{1})$ *der Eigenwerte* λ_i.

$$\underline{\lambda_1 = 0}: \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\vec{v}_1 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in Kern(A - 0 \cdot \mathbb{1})$$

Eigenraum: $E(0) = \langle\{(0,1,0)^T\}\rangle \qquad g_1 = \dim E(0) = 1$

$$\lambda_{2,3} = 2: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{2.Z = 2Z - 4(3Z)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Eigenraum} \quad E(2) = \langle\{(0,2,1)^T\}\rangle$$

$$g_2 = \dim E(2) = 1 \neq 2 = \text{algebr. Vielfachheit}$$

$\Rightarrow \exists$ ein lin. unabh. Hauptvektor 2. Stufe zu $\vec{v}_2$

- *Ist für ein i* $a_i \neq g_i$ *so muss für* λ_i *Hauptvektoren höherer Stufe bestimmt werden.*

- ***Häufiger Spezialfall:*** *λ_i ist Eigenwert mit $a_i = k$ und **ein**dimensionalem Eigenraum. In diesem Fall kann die Hauptvektorkette (nicht immer eindeutig!) rekursiv berechnet werden durch Lösung der Gleichungssysteme: (Dabei ist $\vec{h}_{i,1} := \vec{v}_i$ der Eigenvektor)*

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{1})\vec{h}_{i,1}=\vec{0},\quad (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{1})\vec{h}_{i,2}=\vec{h}_{i,1},\quad \dots,\quad (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{1})\vec{h}_{i,k}=\vec{h}_{i,k-1}$$

$(A-\lambda\mathbb{1})\vec{h}=\vec{v}_2$

Löse das lineare Gleichungssystem: $\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} & & & \vec{v}_2\downarrow \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$ z.B.: $\vec{h}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ (nicht eindeutig)

3. *Schritt: Bestimmung des Lösungsfundamentalsystems*
   - *Für jeden Hauptvektor $\vec{v}_i$ eine Lösung $\vec{x}_i = e^{\mathbf{A}t}\vec{v}_i$ berechnen.*
   - *Sei $\vec{v}$ ein Hauptvektor der Stufe m zum Eigenwert λ, so ist*

$$\vec{x}=e^{\mathbf{A}t}\vec{v}=e^{\lambda t}\left[\vec{v}+t(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{1})\vec{v}+\cdots+\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{1})^{m-1}\vec{v}\right]$$

$\vec{v}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\lambda_1=0$ $\Rightarrow$ $\vec{x}_1=e^{0t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\vec{v}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ $\lambda_2=2$ $\Rightarrow$ $\vec{x}_2=e^{2t}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

- ***Häufiger Spezialfall:*** *λ_i ist ist Eigenwert mit $a_i = k$ und **ein**dimensionalem Eigenraum $\Rightarrow$ zugehörige Lösungen lauten:*

$$\vec{x}_1(t)=e^{\lambda_i t}\vec{h}_{i,1},\quad \vec{x}_2(t)=e^{\lambda_i t}(\vec{h}_{i,2}+t\vec{h}_{i,1}),\dots,\vec{x}_k(t)=e^{\lambda_i t}\left(\vec{h}_{i,k}+\cdots+\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\vec{h}_{i,1}\right)$$

hier: $\vec{h}_{i,1}=\vec{v}_2$, $\vec{h}_{i,2}=\vec{h}$ $\lambda_2=2$

$\Rightarrow \vec{x}_3=e^{2t}(\vec{h}+t\vec{v}_2)=e^{2t}\left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right]=e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1+2t\\t\end{pmatrix}$

- $\mathbf{W}(t) = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ *ist dann die* WRONSKI-*Matrix.*

$$W(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{2t} \\ 1 & 2e^{2t} & (1+2t)e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \end{pmatrix}$$
$$\underbrace{}_{\vec{x}_1} \quad \underbrace{\phantom{2e^{2t}}}_{\vec{x}_2} \quad \underbrace{\phantom{(1+2t)e^{2t}}}_{\vec{x}_3}$$

Nun lösen wir das Anfangswertproblem nach dem Lösungsverfahren 2:

1. *Schritt: Bestimme für das homogene System* $\dot{\vec{x}}(t) = \mathbf{A}\vec{x}(t)$ *ein Fundamentalsystem* $\mathbf{W}(t) \Rightarrow$ *bereits erledigt.*
2. *Schritt: Löse* $\vec{b}(t) = \mathbf{W}(t)\dot{\vec{c}}(t)$ *durch Bestimmung einer Stammfunktion von* $\dot{\vec{c}}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{2t} \\ 1 & 2e^{2t} & (1+2t)e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \\ \dot{c}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

Aus 1. Zeile $\Rightarrow \dot{C}_3 = 0$

$\rightarrow$ setze in 3. Zeile ein

$\Rightarrow \dot{C}_2 = 2 \rightarrow$ dann liefert

$\Rightarrow$ die 2. Zeile: $\dot{C}_1 = 0$

$$\Rightarrow \dot{\vec{C}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \vec{C}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} (+ \overrightarrow{\text{const}})$$

(Eine Lösung / Stammfunktion reicht)

3. *Schritt: Eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems ist* $\vec{x}_p(t) = \mathbf{W}(t)\vec{c}(t)$

$$\vec{x}_p(t) = W(t)\,\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4t\,e^{2t} \\ 2t\,e^{2t} \end{pmatrix}$$

4. *Schritt: Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems ist*

$$\vec{x}(t) = \mathbf{W}(t)\vec{c} + \vec{x}_p(t) \qquad \vec{c} \in \mathbb{C}^n$$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{2t} \\ 1 & 2e^{2t} & (2t+1)e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \end{pmatrix} \vec{c} + 2te^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. *Schritt: Einsetzen der Anfangswertbedingung in (1.16) liefert ein Gleichungssystem für $\vec{c}$.*

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus 1. Zeile: $c_3 = 1$ Aus 3. Zeile $c_2 = 0$ $\Rightarrow c_1 = -1$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2t+1 \\ t \end{pmatrix} + 2t\,e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

ist Lsg. des AWP.

1.2. Rand- und Eigenwertprobleme

1.2.1. Randwertprobleme

Treten bei DGLn von der Ordnung $n \geq 2$ in den Bedingungsgleichungen zur eindeutigen Charakterisierung einer Lösung einer DGL die Funktions- und Ableitungswerte der gesuchten Funktion nicht nur - wie beim AWP - an einer einzigen, sondern an zwei Stellen a und b auf, und man ist nur an einer Lösung auf dem Intervall zwischen a und b interessiert, so spricht man von eeinem **Randwertproblem (RWP)**. Dabei ist die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung auch in einfachen Fällen nicht geklärt. Dabei entscheidet die Art der Randbedingung über die Lösbarkeit, nicht der Typ der DGL. Wir werden im Rahmen des Kurses das Lösen von RWPs anhand von einfachen Beispielen demonstrieren, ohne auf die Theorie (Greensche Funktionen etc.) einzugehen.

Lösungsverfahren 4 (Prinzip zur Lösung eines RWP)

1. *Schritt: Eine allgemeine Lösung der DGL bestimmen.*
2. *Schritt: Randwerte und Randbedingungen in die allgemeine Lösung einsetzen und daraus die Integrationskonstanten bestimmen (eventuell Gleichungssystem lösen).*

1.2.2. Eigenwertprobleme

In vielen RWPn enthält die DGL einen Parameter λ. Die Existenz nichttrivialer Lösungen hängt dann auch noch von den möglichen Werten von λ ab. Man nennt jeden Wert λ, für welchen eine nichttriviale Lösung existiert, **Eigenwert** und jede zugehörige Lösung $\neq 0$ **Eigenfunktion**. Insgesamt spricht man von einem **Eigenwertproblem ((EWP)**. Wir werden im Rahmen des Kurses das Lösen von EWPn wiederum nur anhand von einfachen Beispielen demonstrieren.

Bemerkung 2 (Lösung von Eigenwertproblemen) *Bei EWPn müssen die Werte für die Integrationskonstanten so bestimmt werden, das die Lösung von der Nullfunktion verschieden ist. Dies stellt meistens eine Bedingung für die "erlaubten" Werte des Parameters λ dar.*

Beispiel 3 *(RR'06) Man bestimme alle Parameter $\lambda \geq 0$, für die das RWP*

$$y''(x) - 4y'(x) + (4+\lambda^2)y(x) = 0 \qquad y(0) = y(\pi) = 0$$

nichttriviale Lösungen besitzt.

Wir gehen nach dem Lösungsverfahren 4 vor:

1. *Schritt: Eine allgemeine Lösung der DGL bestimmen.*

char. Polynom: $P(\mu) = \mu^2 - 4\mu + (4+\lambda^2) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \mu_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-4-\lambda^2} = 2 \pm i\lambda$

$\Rightarrow y(x) = e^{2x}(A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x))$ (allg. Lsg)

2. *Schritt: Randwerte und Randbedingungen in die allgemeine Lösung einsetzen und daraus die Integrationskonstanten bestimmen (eventuell Gleichungssystem lösen).*

$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = 1 \cdot (A) \Rightarrow A = 0$

$y(\pi) = 0 \Rightarrow e^{2\pi} B \sin(\lambda\pi) = 0$

für nichttriviale Lösung darf B nicht 0 sein $\Rightarrow \sin(\lambda\pi) = 0$

$\Downarrow$

$\lambda = k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \underline{\underline{y_k(x) = B e^{2x} \sin(kx) \quad k \in \mathbb{N}}}$

Definition 2 (Selbstadjungierter Operator) *Seien $u, v \in C^2([a,b], \mathbb{R})$. Ein Operator L heißt* ***selbstadjungiert****, wenn*

$$\int_a^b uL[v]dx = \int_a^b vL[u]dx \tag{1.18}$$

Satz 4 *Das* ***Sturm-Liouville-Eigenwertproblem*** *hat die Gestalt*

$$L[y] = -(p(x)y')' + q(x)y = \lambda w(x)y, \quad a_1y(a) + a_2y'(a) = 0 \quad b_1y(b) + b_2y'(b) = 0 \tag{1.19}$$

mit einer stetigen Funktion $w(x) > 0$ auf $[a,b]$, Parameter λ und mit den Konstanten $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, von denen jeweils wenigstens eine $\neq 0$ ist. Es gilt

1. *Alle Eigenwerte sind reell.*
2. *Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.*
3. *Jeder Eigenwert hat die geometrische Vielfachheit 1.*

1.3. Stabilität autonomer Differentialgleichungssysteme

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{F} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ Wir untersuchen das Verhalten von Lösungen eines autonomen Differentialgleichungssystems

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{F}(\vec{x}(t)) \tag{1.20}$$

in der Nähe von stationären Lösungen $\vec{x}^* \in \Omega$ (= Gleichgewichtslagen, "Punkttrajektorien"), die durch

$$\vec{F}(\vec{x}^*) = \vec{0} \tag{1.21}$$

charakterisiert werden.

Definition 3 (Stabilität nach Ljapunow) *Eine Gleichgewichtslage $\vec{x}^*$ heißt*

1. ***stabil,** wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ sodass für jede Lösung $\vec{x}$ gilt:*

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \varepsilon \quad \text{für alle } t > 0$$

2. ***attraktiv,** wenn $\exists \delta > 0$ sodass für jede Lösung $\vec{x}$ gilt:*

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta \quad \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*$$

3. ***asymptotisch stabil,** wenn sie stabil und attraktiv ist,*
4. ***instabil,** wenn sie nicht stabil ist,*
5. *im Fall $n = 2$ **Zentrum,** falls es eine Umgebung von $\vec{x}^*$ gibt, in der keine weitere GGL liegt und in der sämtliche Bahnen geschlossen sind.*

Sei $\vec{x}^*$ eine GGL, so kann das DGL-System (1.20) linearisiert werden. Sei nun $\tilde{\vec{x}}$ eine "Abweichung" von $\vec{x}^*$, d.h. $\vec{x} = \vec{x}^* + \tilde{\vec{x}}$ so gilt

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \underbrace{\frac{d}{dt}}_{=0}(\vec{x}^* + \tilde{\vec{x}}(t)) = \vec{F}(\vec{x}^* + \tilde{\vec{x}}(t)) \doteq \underbrace{\vec{F}(\vec{x}^*)}_{=0} + \mathrm{DF}(\vec{x}^*)\tilde{\vec{x}} + \mathcal{O}(\|\tilde{\vec{x}}\|^2)$$

Wir erhalten somit das "linearisierte" System für das Verhalten der Lösungen in der Nähe der GGL:

$$\frac{d}{dt}\tilde{\vec{x}}(t) = \mathbf{A}\tilde{\vec{x}}(t) \tag{1.22}$$

wobei $\mathbf{A} = \mathrm{DF}(\vec{x}^*) = \mathbf{J}_F(\vec{x}^*)$ die Funktional- oder Jacobi-Matrix von $\vec{F}$ ausgewertet an der Stelle $(\vec{x}^*)$ ist.

Lösungsverfahren 5 (Stabilitätsuntersuchung autonomer DGL-Systeme)

1. *Schritt: Alle GGL $\vec{x}^*$ als Lösungen von $\vec{F}(\vec{x}^*) = \vec{0}$ bestimmen.*
2. *Schritt: Die Jacobi-Matrix $\mathrm{DF} = \mathbf{J}_F$ berechnen:*

$$\mathrm{DF} = \mathbf{J}_F = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}F_1 & \partial_{x_2}F_1 & \dots & \partial_{x_n}F_1 \\ \partial_{x_1}F_2 & \partial_{x_2}F_2 & \dots & \partial_{x_n}F_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1}F_n & \partial_{x_2}F_n & \dots & \partial_{x_n}F_n \end{pmatrix}$$

3. *Schritt: für jedes $\vec{x}^*$ die Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{DF}(\vec{x}^*)$ und deren Eigenwerte λ_k berechnen. (eventuell auch Eigen- und Hauptvektoren → helfen beim Zeichen)*
4. *Schritt: Charakterisierung der GGL:*
   - *$Re(\lambda_k) < 0$ für alle $k \Rightarrow \vec{x}^*$ asymptotisch stabil.*
   - *$Re(\lambda_k) > 0$ für (wenigstens) ein $k \Rightarrow \vec{x}^*$ instabil.*
   - *Weitere Fälle für $n = 2$ siehe Beiblatt aus der Vorlesung (Anhang)*
5. *Schritt: Im Fall $n = 2$: Phasenkurven zeichnen*
   - *(falls verlangt): Berechnung der Phasenkurven in x-y-Ebene durch Bestimmung der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung*

     $$y'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{F_2(x,y)}{F_1(x,y)} \tag{1.23}$$

   - *(falls verlangt): Bestimmung einer durch einen bestimmten Punkt (x_0, y_0) gehenden Phasenkurve durch Einsetzen von (x_0, y_0) in die Lösung von (1.24) und Bestimmung der Integrationskonstanten.*
   - *Phasenkurven in der Nähe der GGL siehe Beiblatt aus der Vorlesung (Anhang)*
   - *Punkte, in denen Phasenkurven eine waagrechte Tangente haben, sind bestimmt durch $\dot{y} = F_2(x,y) = 0$*
   - *Punkte, in denen Phasenkurven eine senkrechte Tangente haben, sind bestimmt durch $\dot{x} = F_1(x,y) = 0$*
   - *Die Berechnung von Eigen- und Hauptvektoren im 3. Schritt kann hilfreich sein.*

Beispiel 4 *(RR'05) Gegeben sei folgendes DGL-System*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + y - 3x^2 \\ 6xy \end{pmatrix}$$

a) *Man bestimme Lage und Art der Gleichgewichtslagen (GGL) dieses Systems in linearer Näherung.*

b) *Man gebe eine Phasenbahn-DGL an und löse sie.*

c) *Im x, y-Koordinatensystem skizziere man die GGL und einige Phasenbahnen.*

Wir gehen nach dem Lösungsverfahren 5 vor:

1. *Schritt: Alle GGL $\vec{x}^*$ als Lösungen von $\vec{F}(\vec{x}^*) = \vec{0}$ bestimmen.*

Aus II : $6xy = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $y = 0$

Fall 1 $x = 0 \Rightarrow$ I: $3 + y = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow \vec{x}_1^* = (0, -3)^T$

Fall 2 $y = 0 \Rightarrow$ I: $3(1 - x^2) = 0 \Rightarrow x_{2,3} = \pm 1 \Rightarrow \vec{x}_2^* = (1, 0)^T$

$\vec{x}_3^* = (-1, 0)^T$

2. *Schritt: Die Jacobi-Matrix* $\mathbf{DF} = \mathbf{J}_F$ *berechnen:*

$$\mathbf{DF} = \mathbf{J}_F = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} F_1 & \partial_{x_2} F_1 & \dots & \partial_{x_n} F_1 \\ \partial_{x_1} F_2 & \partial_{x_2} F_2 & \dots & \partial_{x_n} F_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} F_n & \partial_{x_2} F_n & \dots & \partial_{x_n} F_n \end{pmatrix}$$

$$J_F = \begin{pmatrix} -6x & 1 \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$$

3. *Schritt: für jedes* $\vec{x}^*$ *die Matrix* $\mathbf{A} = \mathbf{DF}(\vec{x}^*)$ *und deren Eigenwerte* λ_k *berechnen.*
4. *Schritt: Charakterisierung der GGL:*
   - *Re*$(\lambda_k) < 0$ *für alle* $k \Rightarrow \vec{x}^*$ *asymptotisch stabil.*
   - *Re*$(\lambda_k) > 0$ *für (wenigstens) ein* $k \Rightarrow \vec{x}^*$ *instabil.*
   - *Weitere Fälle für* $n = 2$ *siehe Beiblatt aus der Vorlesung (Anhang)*

$\underline{\vec{x}_1^*}$: $J_F(\vec{x}_1^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -18 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ EW: $\pm i\sqrt{18}$ $\Rightarrow$ <u>Zentrum</u>

$\underline{\vec{x}_2^*}$: $J_F(\vec{x}_2^*) = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$ EW: ± 6 $\Rightarrow$ <u>insges. instabil</u>

zu $\lambda_1 = +6$: $\underbrace{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix}}_{\text{instabile Richtung}}$ zu $\lambda_2 = -6$: $\underbrace{\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{„stabile" Richtung}}$

$\underline{\vec{x}_3^*}$: $J_F(\vec{x}_3^*) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$ EW: ± 6 <u>insgesamt instabil</u>

zu $\lambda_1 = +6$ $\underbrace{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{instabile Richtung}}$ zu $\lambda_2 = -6$: $\underbrace{\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \end{pmatrix}}_{\text{„stabile" Richtung}}$

5. *Schritt: Im Fall* $n = 2$*: Phasenkurven zeichnen*
   - *(falls verlangt): Berechnung der Phasenkurven in* x-y*-Ebene Bestimmung der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung*

$$y'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{F_2(x,y)}{F_1(x,y)} \tag{1.24}$$

Phasenbahn DGL: $y'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{6xy}{3+y-3x^2}$

$\Leftrightarrow \underbrace{(-6xy)}_{P}\,dx + \underbrace{(3+y-3x^2)}_{Q}\,dy = 0$ wegen $\frac{\partial P}{\partial y} = -6x = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$\Rightarrow$ DGL ist exakt $\Rightarrow \exists\, U(x,y)$ mit $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$

$U = \int Q\,dy = 3y + y^2/2 - 3x^2y + C(x)$

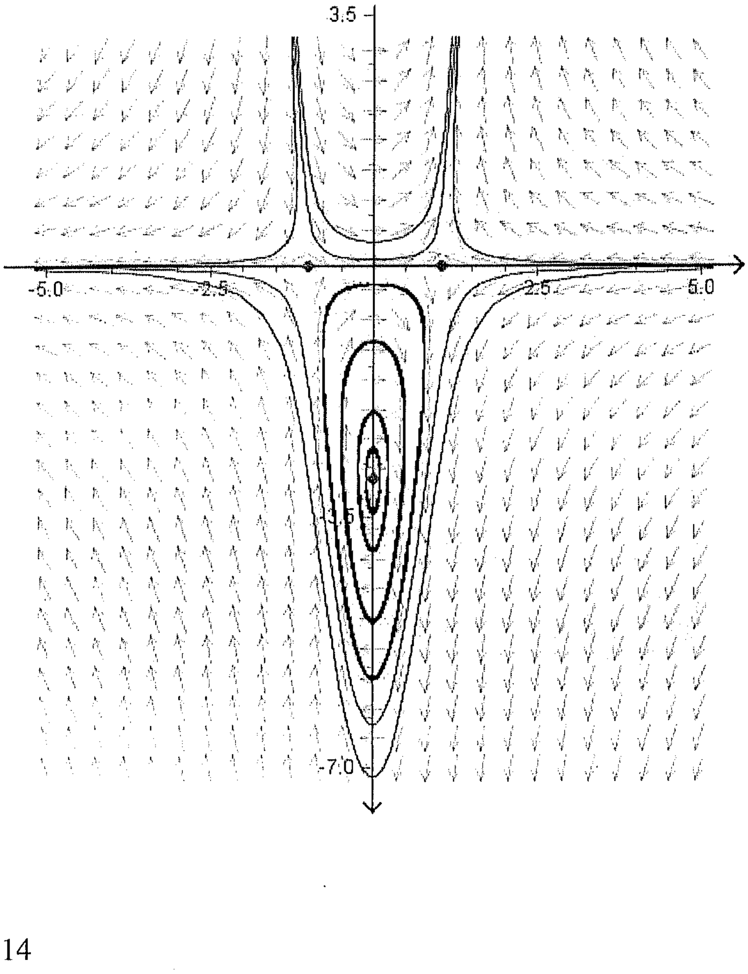
$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = -6xy + C'(x) \overset{!}{=} P = -6xy \Rightarrow C'(x) = 0$

$\Rightarrow U(x,y) = 3y + y^2/2 - 3x^2y + C$, $C \in \mathbb{R}$

Phasenbahn durch gegebenen Pkt (x_0,y_0): $U(x,y) = U(x_0,y_0)$

$\Rightarrow \underline{\underline{3y + y^2/2 - 3x^2y = 3y_0 + y_0^2/2 - 3x_0^2y_0}}$ (implizite Lsg.)

- *Phasenkurven in der Nähe der GGL siehe Beiblatt aus der Vorlesung (Anhang)*
- *Punkte, in denen Phasenkurven eine waagrechte Tangente haben, sind bestimmt durch* $\dot{y} = F_2(x,y) = 0$
- *Punkte, in denen Phasenkurven eine senkrechte Tangente haben, sind bestimmt durch* $\dot{x} = F_1(x,y) = 0$



Periodische Lösungen

Ist eine nichtkonstante Lösung $\vec{x}(t)$ des DGL-Systems $\dot{\vec{x}}(t) = \vec{F}(\vec{x}(t))$ periodisch, d.h. gilt $\vec{x}(t+T) = \vec{x}(t)$ mit einem $T > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so stellt die zugehörige Phasenbahn eine geschlossene Kurve $\vec{w}$ dar. Zwei Fälle sind zu unterscheiden:

1. Benachbarte Bahnen sind ebenfalls geschlossen: Dies tritt bei einem Zentrum auf.
2. Benachbarte Bahnen münden in $\vec{w}$ ein: in diesem Fall ist $\vec{w}$ eine isolierte geschlossene Bahn, man nennt sie **Grenzzyklus**. Ein Grenzzyklus heißt **stabil**, wenn eine kleine Störung zu einer Lösung $\vec{x}(t)$ führt, die für $t \longrightarrow \infty$ wieder gegen $\vec{w}$ strebt. Läuft diese gestörte Bahn für $t \longrightarrow \infty$ von $\vec{w}$ weg, so heißt der Grenzzyklus **instabil**

Beispiel 5 *Gegeben sei das DGL-System*

$$\dot{x} = -y + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\dot{y} = x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\sqrt{x^2+y^2}$$

a) Man zeige, dieses System geht bei Transformation auf Polarkoordinaten über in

$$\dot{r} = \sin r \quad r > 0; \quad \dot{\varphi} = 1$$

b) Man bestimme alle Lösungen, deren Phasenkurven Kreise sind und untersuche deren Stabilität.

c) Man integriere das transformierte System und diskutiere das Verhalten für t $\longrightarrow \infty$

a) Transformation auf Polarkoordinaten:

$$x(t) = r(t)\cos[\varphi(t)] \qquad y(t) = r(t)\sin[\varphi(t)]$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\,\dot{\varphi} \qquad \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{r}\\ \dot{\varphi}\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\dot{r}\\ \dot{\varphi}\end{pmatrix} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix}r\cos\varphi & r\sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{r}\begin{pmatrix}r\cos\varphi & r\sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}-r\sin\varphi + \cos\varphi\sin r\\ r\cos\varphi + \sin\varphi\sin r\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} \text{ aus Angabe}} =$$

$$= \frac{1}{r}\begin{pmatrix}r\sin r\\ r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin r\\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\dot{r} = \sin r\\ \dot{\varphi} = 1\end{array}\right.$$

b) Wir bestimmen nun die Lösungen, deren Phasenkurven Kreise sind. Diese sind dadurch gekennzeichnet, dass der Radius konstant bleibt, d.h.:

$$\dot{r} = 0 \Rightarrow \sin r_n^* = 0 \Rightarrow r_n^* = n \cdot \pi$$

Stabilitätsuntersuchung

„Jakobi-Matrix": $\frac{d}{dr} \sin r = \cos r$

$r_n^* = n\pi$ einsetzen: $\cos r_n^* = \cos(n\pi) = (-1)^n$

n gerade $\Rightarrow$ Lösung / Bahn instabil

n ungerade $\Rightarrow$ Lösung / Bahn stabil

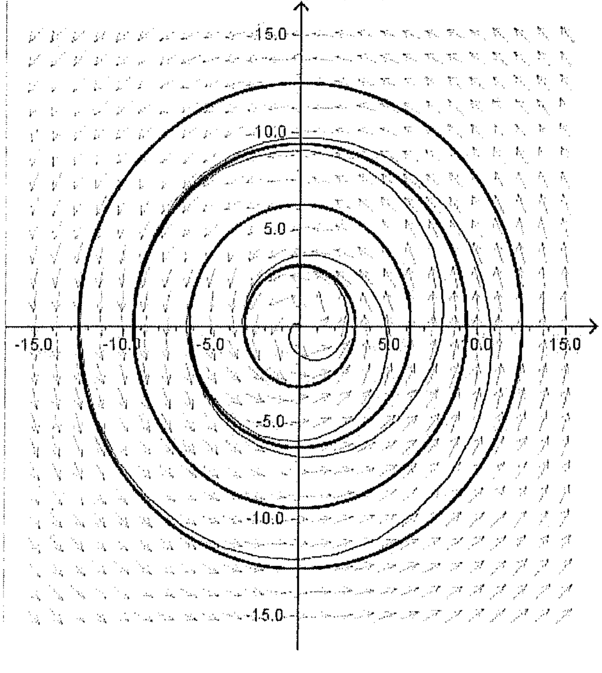
c) Integration des transformierten Systems:

$$\dot{r} = \sin r \iff \int_{r_0}^{r} \frac{1}{\sin r'} \, dr' = \int_0^t 1 \, dt \iff \ln \tan \frac{r}{2} - \ln \tan \frac{r_0}{2} = t$$

$$\iff \tan \frac{r}{2} = \tan \frac{r_0}{2} e^t$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{r(t) = 2 \operatorname{Arctan}\left(\tan \frac{r_0}{2} e^t\right) + 2n\pi}} \quad \text{für } n\pi < r_0 < (n+1)\pi$$

mit Startpunkt / Startradius r_0



- $2n\pi < r_0 < \pi(2n+1) \Rightarrow r(t)$ monoton wachsend, konvergiert gegen Grenzzyklus r_{2n+1}^*

- $(2n+1)\pi < r_0 < (2n+2)\pi$
$\Rightarrow r(t)$ monoton fallend, konvergiert gegen Grenzzyklus r_{2n+1}^*

1.4. Checkliste/Kontrollfragen

- Wie setzt sich die allgemeine Lösung eines inhomogenen linearen DGL-Systems zusammen? Welche Superpositionsprinzipien gibt es?
- Welche Struktur hat die allgemeine Lösung eines homogenen linearen DGL-Systems?
- Welche berechnet man die Lösung eines homogenen linearen DGL-Systems mit konstanten Koeffizienten?
- Wie berechnet man eine Basis des $\mathbb{C}^n$ aus Eigen- und Hauptvektoren einer $n \times n$-Matrix A?
- Welchen Beitrag zur Lösung eines homogenen linearen DGL-Systems mit konstanten Koeffizienten hat ein Hauptvektor der Stufe l?
- Wie bestimmt man partikuläre Lösungen eines inhomogenen linearen DGL-Systems durch Variation der Konstanten bzw. mit einem Störgliedansatz?
- Wie geht man bei der Lösung eines Rand(eigen)wertproblems vor?
- Wie bestimmt man stationäre Lösungen/Gleichgewichtslagen eines autonomen DGL-Systems?
- Wie charakterisiert man die stationären Lösungen/Gleichgewichtslagen eines autonomen DGL-Systems in linearer Näherung?
- Wie skizziert man qualitativ Phasenbahnen eines autonomen DGL-Systems?