

FERIENKURS EXPERIMENTALPHYSIK 1

Vorlesung 2

Systeme von Massepunkten, Stöße und der starre Körper

Steffen Maurus, Diana Beyerlein, Markus Perner

06.03.2012

1 Systeme von Massenpunkten

Wir betrachten nun ein System aus vielen Massenpunkten. Es ist für uns wenig sinnvoll, jeden dieser Massepunkte einzeln zu betrachten, weshalb wir mit zugänglicheren allgemeinen Größen operieren, mit denen wir aussagekräftige Ergebnisse für Stoßprozesse und das Verhalten von starren Körpern treffen können. Daher definieren wir die Gesamtmasse, die nichts weiter ist als die Summe der einzelnen Punktmassen. Diese geht für kontinuierliche Masseverteilungen in ein Integral über

$$M = \sum_i^N m_i \longrightarrow M = \int dm = \int \rho dV \quad (1)$$

wobei ρ die Dichte des Körpers und dV ein infinitesimales Volumenelement des Körpers ist.

1.1 Schwerpunktkoordinaten

Vor allem wenn wir uns Stoßprozesse und die Bewegung starrer Körper unter dem Einfluss äußerer Kräfte anschauen wollen, helfen uns Schwerpunktkoordinaten weiter. Der Schwerpunkt eines Systems aus N -Teilchen ist definiert als

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{r}_i \quad (2)$$

woraus man die ebenfalls hilfreiche Schwerpunktschwindigkeit durch Ableiten leicht erhalten kann

$$\vec{V} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \vec{v}_i \quad (3)$$

Bei der Betrachtung von Stoßprozessen wird sich vor allem der Spezialfall zweier Massepunkte als wichtig erweisen:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{V} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (4)$$

Manchmal ist es nützlich, die Beschreibung der beiden Massenpunkte mit ihren Ortskoordinaten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ zugunsten einer Beschreibung durch die Schwerpunktkoordinate $\vec{R}$ und die Relativkoordinate $\vec{r} = r_1 - r_2$ zu wechseln.

1.2 Impulserhaltung

Der Impuls bzw. der Gesamtimpuls ist genau dann erhalten, wenn er sich nicht mit der Zeit ändert, d.h. wenn die Ableitung nach der Zeit null ergibt

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \text{const.} \Leftrightarrow 0 = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \quad (5)$$

Dies bedeutet nach der Definition der Kraft also nichts anderes, als dass der Impuls bei Abwesenheit äußerer Kräfte erhalten ist. Betrachten wir erneut ein System aus zwei Massenpunkten, erhalten wir folgendermaßen das uns bekannte dritte Newtonsche Axiom:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const} \Rightarrow \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = 0 \Rightarrow \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

wobei $\vec{F}_{12}$ die Kraft ist, die Körper 1 auf Körper 2 ausübt, bzw. Körper 2 auf Körper 1 für $\vec{F}_{21}$.

1.3 Drehimpulserhaltung

Den Drehimpuls haben wir bereits in Vorlesung 1 eingeführt

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v} \quad (6)$$

Wenn ein Drehmoment wirkt, dann ändert sich der Drehimpuls zeitlich

$$\vec{D} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (7)$$

wobei wir hier von Drehimpulserhaltung sprechen, wenn die Zeitableitung des Drehimpulses verschwindet, also wenn kein äußeres Drehmoment wirkt. An Definition ?? erkennen wir wegen $\vec{r} \parallel \vec{F}$ im Fall von Zentralkraftfeldern und $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ für $\vec{a} \parallel \vec{b}$ die wichtige Aussage

$$\text{Im Zentralkraftfeld ist der Drehimpuls erhalten.} \quad (8)$$

1.4 Stöße

Ein System ist abgeschlossen, wenn kein Teilchen- und Energieaustausch mit der Umgebung stattfindet. Darin sind also Energie und Impuls erhalten. In der folgenden Betrachtung der Gesamtenergie der Stoßprozesse betrachten wir nur die kinetische Energie und ggf. die Wärmeenergien für den Fall inelastischer Stöße.

Elastische Stöße

Darunter verstehen wir Stöße, bei denen keine Wärmeenergie frei wird (z.B. durch Reibungsverluste, Deformation), wir brauchen also nur die Änderung der kinetischen Energie zu betrachten. Wir betrachten wieder den vereinfachten Fall zweier Stoßpartner mit Massen m_1 und m_2 , die einen zentralen Stoß ausführen, d.h. ihre beide Schwerpunkte und die Richtung, in der sie aufeinander stoßen, liegen alle auf einer Linie. Wird man mit Aufgaben zum Stoß konfrontiert, dann ist der Standardansatz, die Beziehungen zu Energieerhaltung und Impulserhaltung aufzustellen und ineinander einzusetzen

$$\text{Energieerhaltung: } \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \quad (9)$$

und

$$\text{Impulserhaltung: } p_1 + p_2 = p_1' + p_2' = m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \quad (10)$$

Diese Gleichungen können wir nun ineinander einsetzen, um Ausdrücke für die Geschwindigkeiten nach dem Stoß zu erhalten, wenn wir die Anfangsgeschwindigkeiten und die Massen als gegeben voraussetzen. Der dafür nötige Rechenweg sei hier exemplarisch durchgeführt: Zuerst schreiben wir die Energieerhaltung durch die Ersetzung $m_1 \cdot v_1^2 = \frac{p_1^2}{m_1}$ um und formen das Ergebnis weiter um

$$\begin{aligned} \frac{p_1^2}{m_1} + \frac{p_2^2}{m_2} &= \frac{p_1'^2}{m_1} + \frac{p_2'^2}{m_2} \\ \frac{p_1^2 - p_1'^2}{m_1} &= \frac{p_2'^2 - p_2^2}{m_2} \\ \frac{(p_1 - p_1')(p_1 + p_1')}{m_1} &= \frac{(p_2' - p_2)(p_2' + p_2)}{m_2} \end{aligned}$$

Dies haben wir so umgeformt, um nun die Impulserhaltung ?? umzuformen, denn diese gibt uns $p_1 - p_1' = p_2' - p_2$, so dass wir diese Klammern auf beiden Seiten wegkürzen können

$$m_2(p_1 + p_1') = m_1(p_2' + p_2)$$

Nun können wir die Impulserhaltung erneut auf andere Weise umformen, so dass wir $p_2' = p_1 + p_2 - p_1'$ einsetzen können und schließlich durch weiteres umformen nach v_1' einen Ausdruck für die Geschwindigkeit von Körper 1 nach dem Stoß erhalten. Analog bekommt man den Ausdruck für v_2' durch Einsetzen von $p_1' = p_1 + p_2 - p_2'$ (stattdessen könnte man auch einfach die Indizes des Ergebnisses für v_1' vertauschen). Für die Geschwindigkeiten nach dem **zentralen Stoß** erhalten wir also:

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2} \quad \text{bzw.} \quad v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2} \quad (11)$$

Dies kann man sich durch Betrachtung von Spezialfällen plausibel machen:

- Sind die Geschwindigkeiten identisch, also $v_1 = v_2 = v$ vor dem Stoß, dann auch $v'_1 = v'_2 = v$ nach dem Stoß. Es wurde keine Energie ausgetauscht.
- Sind die Massen identisch, also $m_1 = m_2 = m$, dann $v'_1 = v_2$ und $v'_2 = v_1$. Der erste Körper hat seine Energie vollständig auf den zweiten übertragen und umgekehrt.
- Ein Körper ruht vor dem Stoß, o.B.d.A. $v_2 = 0$, gleichzeitig sei die Masse des ruhenden Körpers viel größer als die des bewegten ($m_2 \gg m_1$). Man könnte sich z.B. vorstellen, dass ein Tennisball (Körper 1) gegen eine Wand (Körper 2) geworfen wird. Dann erhält man $v'_1 = -v_1$, d.h. die Geschwindigkeit des bewegten Körpers bleibt gleich und wechselt nur ihr Vorzeichen, der schwere Körper bleibt unbewegt.

Für einen nicht mehr zentral erfolgenden elastischen Stoß kann man für den Spezialfall $m_1 = m_2 = m$ und $v_2 = 0$ zeigen, dass gilt

$$\vec{p}'_1 \cdot \vec{p}'_2 = 0$$

die Impulsvektoren nach dem Stoß stehen nach dem Stoß also senkrecht aufeinander.

inelastischer Stoß Beim inelastischen Stoß kommt z.B. durch Deformierung und Reibung noch die Wärmeenergie mit ins Spiel, die kinetische Energie ist also nicht erhalten, da sie in Wärmeenergie umgewandelt werden kann. Allerdings bleibt die Gesamtenergie aus kinetischer und Wärmeenergie erhalten. Die Impulserhaltung ist nicht beeinträchtigt. Da wir den inelastischen Stoß i.A. nicht mehr lösen können, beschränken wir uns auf den Spezialfall des vollkommen inelastischen Stoßes, bei dem Körper 1 und Körper 2 nach dem Stoß aneinander haften bleiben und sich dann mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ als ein Körper fortbewegen.

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (12)$$

Die Menge an kinetischer Energie, die beim Stoß in Wärmeenergie umgewandelt wurde, berechnet man mit

$$E_{\text{Wärme}} = \Delta E_{\text{kin}} = E_{\text{kin,vorher}} - E_{\text{kin,nachher}} = (E_{\text{kin},v_1} + E_{\text{kin},v_2}) - (E_{\text{kin},v}) \quad (13)$$

Schwerpunktsystem Manche Probleme vereinfachen sich dadurch, dass wir sie im Schwerpunktsystem berechnen. In diesem System sehen wir den Schwerpunkt der beiden Körper als Koordinatenursprung an. Dies können wir tun, da das Inertialsystem, in

dem wir den Stoß betrachten, immer frei wählbar ist. Vom Laborsystem aus gesehen bewegt sich der Schwerpunkt der beiden aufeinander zukommenden Körper für die bisher betrachteten Fälle geradlinig gleichförmig, ist also ein Inertialsystem. Das Schwerpunktsystem bietet den Vorteil, dass in ihm der Schwerpunktimпульs verschwindet:

$$\vec{P} = M\vec{V} = \sum_i m_i v_{is} = 0 \quad (14)$$

denn im Schwerpunktsystem gilt $\vec{V} = 0$, da der Schwerpunkt natürlich in dem System ruht, indem er selbst als Ursprung angesehen wird. Für zwei Körper erhalten wir

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \Leftrightarrow m_1 \vec{v}_{1s} = -m_2 \vec{v}_{2s} \quad (15)$$

Wenn sich zwei Körper im SP-System aufeinander zubewegen, hat ihr Impuls also den gleichen Betrag. Die Körper bewegen sich im Schwerpunktsystem auch nach dem Stoß in genau entgegengesetzter Richtung voneinander fort, wobei ihr Impulsbetrag wegen ?? wieder derselbe ist. Beim zentralen Stoß werden sogar die Anfangsimpulse nur umgedreht:

$$p_{1s} = -p'_{1s} \text{ bzw. } v_{1s} = -v'_{1s} \quad (16)$$

Labor- und Schwerpunktsystem können durch eine Galilei-Transformation leicht ineinander übergeführt werden:

$$\vec{r}_{is} = \vec{r}_i - \vec{R} \text{ für } i = 1, 2, \vec{v}_{is} = \vec{v}_i - \vec{V} \text{ für } i = 1, 2 \quad (17)$$

wodurch die Gesamtenergie im Laborsystem auch folgendermaßen ausgedrückt werden kann

$$E = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) = \frac{1}{2}(MV^2 + m_1 v_{1s}^2 + m_2 v_{2s}^2) \quad (18)$$

2 Der starre Körper

Bisher haben wir idealisierte Körper betrachtet, die nur aus einem Massepunkt bestehen und keine räumliche Ausdehnung besitzen. Der starre Körper besteht nun aus vielen Massepunkten mit der Einschränkung, dass diese Massepunkte alle den gleichen Abstand voneinander haben, also

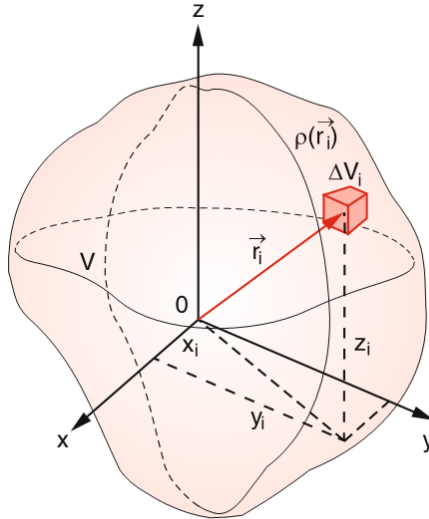


Abbildung 1: starrer Körper aufgeteilt in Volumenelemente

$$|r_{ij}| = \text{const.} \quad (19)$$

Wobei mit i, j die einzelnen Massepunkte bezeichnet werden und $|r_{ij}|$ der Abstand zweier solcher Massepunkte voneinander ist. Die Schwingung von Massepunkten gegeneinander bzw. die Veränderung der Distanz der Massepunkte z.B. durch Kompression wird später behandelt und bleibt hier unbeachtet. Wenn wir es nicht mehr mit einzelnen, diskreten Massepunkten zutun haben sondern von einem Körper mit kontinuierlicher Masseverteilung sprechen, werden Summen über die Massepunkte zu Integrale über infinitesimale Masseinheiten bzw. wir betrachten stattdessen die ortsabhängige Dichte $\rho(\vec{r})$. Für homogene Masseverteilungen gilt $\rho = \text{const.}$, in diesem Fall kann die Dichte also aus dem Integral gezogen werden. Zu der bereits eingeführten **Masse** ?? können wir nun auch für den Fall kontinuierlicher Masseverteilungen den **Schwerpunkt** einführen:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int_V dV \rho(\vec{r}) \vec{r} \quad (20)$$

Später führen wir noch den Trägheitstensor I bzw. die drei Hauptträgheitsmomente I_1, I_2, I_3 ein. An Abbildung 1 können wir uns veranschaulichen, dass sich jede Bewegung des starren Körpers in eine Bewegung des Schwerpunktes und eine Drehung um den Schwerpunkt zerlegen lässt. Dafür stellen wir uns statt des einen Kraftvektors, der am starren Körper angreift, gleich drei Kraftvektoren vor - die beiden hinzugekommenen greifen am Schwerpunkt an, sind betragsgleich und einander entgegengesetzt, heben sich also gegenseitig auf. Somit haben wir die ursprüngliche Konstellation nicht verändert. Der Kraftvektor, der nicht am SP angreift und der ihm entgegengesetzte Vektor,

der am Schwerpunkt angreift, bilden ein sogenanntes Kräftepaar. Dieses sorgt für eine Rotationsbewegung um den Schwerpunkt. Der verbleibende, ebenfalls am Schwerpunkt angreifende Vektor sorgt nun für die Translationsbewegung des Schwerpunktes und damit des gesamten starren Körpers. In Formeln:

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{R}} + \omega \times (\vec{r}_i - \vec{R}) \quad (21)$$

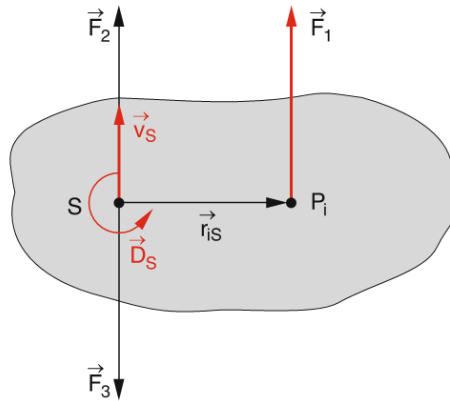


Abbildung 2: Aufteilung einer einzelnen angreifenden Kraft F_1 in drei Kräfte $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ mit zwei einander aufhebenden Kräften $\vec{F}_2, \vec{F}_3$

$\vec{\omega}$ ist ein Vektor, der in die Richtung der Drehachse zeigt und dessen Betrag der Winkelgeschwindigkeit ω entspricht. Die Orientierung der Rotation kann durch die rechte-Hand-Regel bestimmt werden: Der Daumen zeigt dabei in Richtung der Drehachse, die gekrümmten Finger zeigen die Orientierung der Drehung an. Im Gegensatz zum Massepunkt, der nur Translationsbewegungen ausführen kann und daher drei Freiheitsgrade hat, hat der starre Körper

$$3 \text{ Translationsfreiheitsgrade} + 3 \text{ Rotationsfreiheitsgrade} = 6 \text{ Freiheitsgrade} \quad (22)$$

Drehimpuls und Drehimpulserhaltung werden definiert wie zuvor. Bei skalarer Bestimmung des Drehimpulses, ist darauf zu achten, ob $\vec{r} \perp \vec{p}$, dann erhält man den einfachen Fall $L = rp$. Ansonsten tragen nur die nicht zu $\vec{p}$ parallelen Anteile von $\vec{r}$ zum Drehimpuls bei, und da jeder Vektor $\vec{r}$ in einen zu einem Bezugsvektor parallelen und senkrechten Teil zerlegt werden kann, bekommen wir L unter alleiniger Beachtung von $r_{\perp}$.

Trägheitsmoment und Rotationsenergie Es gibt einen linearen Zusammenhang zwischen Winkelgeschwindigkeitsvektor und Schwerpunktsdrehimpuls: Dies kann sich, wenn wir den skalaren Fall betrachten, zu dem als Rollbedingung bekannten Zusammenhang vereinfachen

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} \quad (23)$$

Hier müssen wir nun zwei Fälle für den Trägheitstensor I unterscheiden

- I ist ein Skalar und wird einfach als Trägheitsmoment bezeichnet. In diesem Fall ist die Richtung des Drehimpulses gleich der Richtung der Winkelgeschwindigkeit und somit der Drehachse. Dieser Fall ist ein Spezialfall des zweiten Falles (da ein Skalar ein Tensor 0. Stufe ist). Das Trägheitsmoment berechnet man über

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \longrightarrow I = \int r_{\perp}^2 \rho(\vec{r}) dV \quad (24)$$

Dabei ist $r_{\perp}$ der senkrechte Abstand des Massenpunktes bzw. des betrachteten Volumenelementes von der Drehachse. $r_{\perp}$ darf nicht mit der Länge des Ortsvektors des Massenpunktes oder Volumenelementes verwechselt werden. Wichtig ist zudem, dass sich das Trägheitsmoment immer auf eine bestimmte, fixierte Drehachse bezieht ($\longrightarrow$ Satz von Steiner). Das Trägheitsmoment zeigt an, dass Massepunkte mit höherer Distanz zur Drehachse sich stärker auswirken. Entsprechend ist für höhere Distanzen von der Drehachse auch die Rotationsenergie größer.

- I ist eine Matrix (Tensor 2. Stufe). Im allgemeinen fällt die Richtung der Drehachse nicht mit der Drehimpulsrichtung zusammen. Diese Möglichkeit wird z.B. an der Kreiselbewegung deutlich. Für jeden Körper können wir drei Hauptträgheitsachsen angeben. Symmetrieachsen sind immer Hauptträgheitsachsen. Der Trägheitstensor ist in diesen Achsen diagonal und lässt sich daher besonders leicht angeben ($\longrightarrow$ lineare Algebra). Die Einträge des Trägheitstensors lassen sich in Schwerpunktskoordinaten folgendermaßen berechnen:

$$I_{ij} = \int_V dV \rho(\vec{r}) (\delta_{ij} r^2 - x_i x_j) \quad (25)$$

Bisher haben wir nun die kinetische Translationsenergie betrachtet. Genauso hat nun ein sich drehender Körper eine kinetische **Rotationsenergie**

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (26)$$

Diese Formel ist ähnlich zu der für die Translationsenergie, wobei I die Rolle der Masse und ω die Rolle der Geschwindigkeit einnimmt. Ein Körper, der rotiert und dessen Schwerpunkt eine Translationsbewegung erfährt, hat also die Gesamtenergie $E_{ges} = E_{rot} + E_{trans} = \frac{I}{2} \omega^2 + \frac{m}{2} v^2$

2.1 Satz von Steiner

Der Satz von Steiner kommt immer dann zum Einsatz, wenn die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt geht. Unsere bisherige Definition des Trägheitsmomentes in ?? galt nur für Drehachsen durch den Schwerpunkt, für andere Drehachsen müssen wir auch ein anderes Trägheitsmoment I_B finden. Dieses Trägheitsmoment kann man berechnen, wenn man das Trägheitsmoment einer zur ursprünglichen Drehachse parallelen Drehachse durch den Schwerpunkt I_S (früher einfach I genannt), die Gesamtmasse M des Körpers und den Abstand der beiden Drehachsen d kennt:

$$\text{Satz von Steiner: } I_B = I_S + Md^2 \quad (27)$$

Kennt man nun nur das Trägheitsmoment I_B einer Achse in bestimmtem Abstand zum Schwerpunkt, ohne das Trägheitsmoment der entsprechenden parallelen Achse durch den Schwerpunkt I_S zu kennen, kann man bei gegebenem Abstand dennoch das Trägheitsmoment I_C jeder dazu parallelen Achse bestimmen:

$$I_B = \text{bekannt} = I_S + Md_1^2$$

$$I_C = \text{unbekannt} = I_S + Md_2^2$$

Durch Subtraktion der Gleichungen fällt das unbekannte I_S weg, alle restlichen Größen sind bekannt und I_C kann somit bestimmt werden.

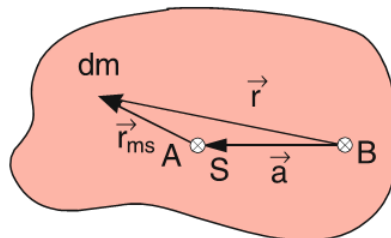


Abbildung 3: Zum Satz von Steiner

2.2 Dynamik starrer Körper

Wir betrachten nun genauer, wie sich der starre Körper unter dem Einfluss von Kräften verhält und mathematisch beschreiben lässt. Dafür sind stets folgende Regeln zu beachten

- Der Angriffspunkt einer Kraft darf in Richtung der Kraft verschoben werden. Alle möglichen Angriffspunkte der Kraft liegen also auf einer Linie in Richtung der

Translation		Rotation	
Größe	Definition	Größe	Definition
Ort	x	Winkel	φ
Geschwindigkeit	$v = \frac{dx}{dt}$	Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Impuls	$p = m \cdot v$	Drehimpuls	$L = I \cdot \omega$
Masse	m	Trägheitsmoment	$I = \rho \int_V r^2 dV$
Kinetische Energie	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$	Rotationsenergie	$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2$
Beschleunigung	$\frac{d^2x}{dt^2}$	Winkelbeschleunigung	$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$
Kraft	$F = m \frac{d^2x}{dt^2}$	Drehmoment	$M = I \frac{d^2\varphi}{dt^2}$

Abbildung 4: Vergleich Translation und Rotation

Kraft, der Wirklinie. Möchte man zwei Kräfte kombinieren, verschiebt man ihre Angriffspunkte zum Schnittpunkt ihrer Wirklinien. Es ist nicht möglich, die Kräfte zu kombinieren, wenn es diesen Schnittpunkt nicht gibt - dafür können aber die später sichtbaren Wirkungen der Einzelkräfte miteinander kombiniert werden.

- im gemeinsamen Angriffspunkt kann mit den Kräften operiert werden wie gewohnt

Eine Kraft, die im Schwerpunktsystem am Punkt $\vec{r}$ angreift, ruft eine Beschleunigung $\vec{M}\vec{R} = \vec{F}$ und ein Drehmoment $\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F}$ hervor. Falls wir ein System in Ruhe betrachten, verschinden Gesamtkraft und Drehmoment stets:

$$\text{statisches System: } F_{ges} = \sum_i \vec{F}_i = 0 \text{ und } D_{ges} = \sum_i \vec{D}_i = 0 \quad (28)$$

Wir oben besprochen, erzeugt ein Drehmoment eine Änderung des Drehimpulses

$$\dot{\vec{L}} = \vec{D} = I \cdot \dot{\vec{\omega}} \quad (29)$$

Auch hier wird die Analogie zu Gesetzmäßigkeiten bei Translationsbewegungen deutlich, hier zum zweiten Newtonschen Gesetz durch den Vergleich $\vec{L} \leftrightarrow \vec{F}$, $I \leftrightarrow m$ und $\dot{\vec{\omega}} \leftrightarrow \vec{v}$.

2.3 Analogien zwischen Translation und Rotation

Die bereits angesprochenen analogen Verhaltensweisen zwischen Rotation und Translation sind in der Tabelle nochmal zusammengefasst und erweitert.

2.4 Rollbewegung

In den Übungen hat man es häufig mit einem starren, zylindersymmetrischen Körper mit Radius R zu tun, der eine schiefe Unterlage herunterrollt (auch der Jojo gehört in diese Kategorie mit einem Winkel der Unterlage von $\alpha = 90^\circ$). Der Schwerpunkt des Körpers bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{V}$ die Unterlage hinunter, dabei dreht er sich mit Winkelgeschwindigkeit ω um seine Symmetrieachse die durch die Mitte der beiden kreisförmigen Deckelflächen geht. Wenn dieser Körper nun rollt, ohne zu rutschen, heißt dies, dass die **Rollbedingung** erfüllt ist, die sich aus ?? herleiten lässt:

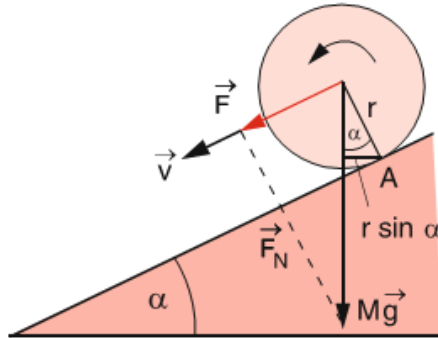


Abbildung 5: Rollender Zylinder

$$v = \omega r \quad (30)$$

Dies kann man sich auch so veranschaulichen: Hat der Zylinder in der Zeit T mit der Winkelgeschwindigkeit ω eine vollständige Umdrehung gemacht, dann hat der Schwerpunkt eine Strecke zurückgelegt, die dem Umfang des Zylinders entspricht: $Tv = 2\pi R = TR\frac{2\pi}{T} = T\omega R$. Kürzen von T gibt nun die Rollbedingung. Mit Hilfe der Rollbedingung wird die kinetische Gesamtenergie eines rollenden Körpers:

$$E = E_{trans} + E_{rot} = \frac{M}{2}v^2 + \frac{I}{2}\omega^2 = \frac{\frac{I}{r^2} + M}{2}v^2 = \frac{I + Mr^2}{2}\omega^2 \quad (31)$$