

Analysis 1 - Integration und gewöhnliche Differentialgleichungen

18. März 2011

1 Das Riemann-Integral

1.1 Definition (Zerlegung eines Intervalles): Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $z([a, b]) := (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ mit

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

dann nennt man $z([a, b])$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Die Menge aller Zerlegungen von $[a, b]$ bezeichnen wir mit $Z([a, b])$. Eine Zerlegung z_1 nennt man feiner als eine Zerlegung z_2 , wenn z_1 alle Punkte x_i , $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ aus z_2 enthält und man schreibt $z_2 \subset z_1$. Mit $z_1 \cup z_2$ bezeichnet man die Zerlegung, welche aus den Punkten von z_1 und z_2 besteht.

1.2 Definition (Ober- und Untersumme): Sei $z = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a, b]$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, dann machen wir die folgenden Definitionen

$$\delta_i := x_{i+1} - x_i \quad , \quad \alpha_i := \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f \quad , \quad \beta_i := \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f$$

und nennen

$$O_z(f) := \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i \alpha_i$$

die Obersumme von f zur Zerlegung z und

$$U_z(f) := \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i \beta_i$$

die entsprechende Untersumme.

Nun will man durch immer feinere Zerlegungen die Ober- und Untersumme möglichst "nahe" an den von der Funktion f überstrichenen Flächeninhalt annähern. Ziel ist es den Flächeninhalt des Graphen genau wiederzugeben. Dazu geben wir zunächst zwei möglichst gute Approximationen an.

1.3 Definition (Ober- und Unterintegral): Für eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nennt man

$$\mathfrak{O}(f) := \inf\{O_z(f) : z \text{ ist eine Zerlegung von } [a, b]\}$$

das Oberintegral zu f und

$$\mathfrak{U}(f) := \sup\{U_z(f) : z \text{ ist eine Zerlegung von } [a, b]\}$$

entsprechend das Unterintegral. Es gibt nun Fälle in denen Ober- und Unterintegral unterschiedlich sind und daher kein eindeutiger Flächeninhalt zugewiesen werden kann. Diese Fälle wollen wir als pathologisch aussondern und machen deshalb die folgende Definition.

1.4 Definition(Riemann-Integrierbarkeit): Man nennt eine Funktion Riemann-integrierbar, wenn

$$\mathfrak{D}(f) = \mathfrak{U}(f)$$

gilt, und man schreibt dann

$$\int_a^b f(x) dx := \mathfrak{o}(f) = \mathfrak{U}(f)$$

1.5 Beispiel (Integrieren von Hand): Wir gönne uns den Spaß und versuche uns daran, mit dieser noch recht rohen Definition eine einfache Funktion zu integrieren. Dazu nehmen wir $f : [z_0, z_n] \rightarrow \mathbb{R}$, $f := x$ her. Dann gilt für eine Zerlegung $z = (z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n)$ die Relationen $\delta_i = z_{i+1} - z_i$, sowie $\alpha_i = z_{i+1}$ und $\beta_i = z_i$. Wir berechnen zunächst die Obersumme, welche sich nun geschickt umordnen lässt

$$\begin{aligned} O_z(f) &= \sum_{i=0}^{n-1} z_{i+1}(z_{i+1} - z_i) \\ &= z_n^2 - z_n z_{n-1} + z_{n-1}^2 - z_{n-1} z_{n-2} + z_{n-2}^2 + \dots + z_1^2 - z_0 z_1 \\ &= \frac{z_n^2}{2} + \left(\frac{z_n}{\sqrt{2}} - \frac{z_{n-1}}{\sqrt{2}} \right)^2 + \dots - \frac{z_0^2}{2} \\ &= \frac{z_n^2 - z_0^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i^2 \end{aligned}$$

Wir wählen uns nun eine Folge äquidistanter Zerlegungen mit den Differenzen

$$\delta_i^n = \frac{z_n - z_0}{n}$$

womit sich nun

$$O_z(f) = \frac{z_n^2 - z_0^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{(z_n - z_0)^2}{n^2} \sum_{i=0}^n = \frac{z_n^2 - z_0^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{(z_n - z_0)^2}{n}$$

welches nun monoton fallend gegen den Grenzwert $\frac{z_n^2 - z_0^2}{2}$ konvergiert. Dieser bildet gleichzeitig eine untere Schranke für die Folge und daher gilt

$$\mathfrak{D}(f) = \frac{z_n^2 - z_0^2}{2}$$

Ebenso ergibt sich für die Untersumme mit der selben Folge von Zerlegungen

$$\begin{aligned} U_z(f) &= \sum_{i=0}^{n-1} z_i(z_{i+1} - z_i) \\ &= z_n z_{n-1} - z_{n-1}^2 + z_{n-1} z_{n-2} + \dots - z_0^2 \\ &= \frac{z_n^2 - z_0^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i^2 \\ &= \frac{z_n^2 - z_0^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{(z_n - z_0)^2}{n} \end{aligned}$$

welches monoton wachsend gegen $\frac{z_n^2 - z_0^2}{2}$ konvergiert und da dieser Grenzwert auch eine obere Schranke für diese Folge bildet, gilt

$$\mathfrak{U}(f) = \frac{z_n^2 - z_0^2}{2}$$

Wir haben nun gezeigt, dass $\mathfrak{D}(f) = \mathfrak{U}(f)$ gilt, und es folgt daher aus der Definition, dass die Funktion Riemann-integrierbar ist. Man schreibt hierfür

$$\int_{z_0}^{z_n} f(x) dx = \frac{z_n^2 - z_0^2}{2}$$

1.6 Satz: Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Einschränkungen auf $[a, c]$ und $[c, b]$ für $c \in (a, b)$ Riemann-integrierbar sind. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Wir geben jetzt einige einfachere Kriterien an, wann eine Funktion Riemann-integrierbar ist, da es meistens sehr langwierig ist, dies mit der Definition selbst zu zeigen. Dazu merken wir zunächst einmal an, dass mit zwei Riemann-integrierbaren Funktionen $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ auch

$$\lambda f + \mu g$$

Riemann-integrierbar ist.

1.7 Satz (Riemann-Integrierbarkeit monotoner Funktionen): Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine monotone Funktion, dann gilt, dass f auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar ist.

Ein weiteres, grundlegendes Resultat ist die Riemann-Integrierbarkeit der Komposition. Man beachte dabei die Stetigkeitsforderung an die Funktion g .

1.8 Satz (Riemann-Integrierbarkeit der Komposition von Funktionen): Seien $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f([a, b]) \subset [c, d]$ Riemann-integrierbar und $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann ist auch $(g \circ f) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Hieraus folgt mit $f(x) = x$ das wichtige Resultat:

Stetige Funktionen sind Riemann-integrierbar.

Weitere Aussagen zur Integrierbarkeit nach Riemann fassen wir einem Satz zusammen.

1.9 Satz: Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, dann sind auch die folgenden Funktionen wieder über $[a, b]$ Riemann-integrierbar:

$$|f|, f^2, g \cdot f, \max f, g, \min f, g$$

1.10 Satz (Rechenregeln für Integrale): Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$(a) \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$(b) \int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

$$(c) \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq (b-a) \cdot \|f\|_{[a,b]}$$

$$(d) f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

1.11 Definition (Stammfunktion): Seien $I \subset \mathbb{R}$ offen und $F(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, dann nennt man F eine Stammfunktion zur Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, wenn

$$F'(x) = f(x) \quad , \quad \forall x \in I$$

gilt.

1.12 Beispiel: Die Funktion $F : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, F := \sqrt{1+x^2}$ ist im Definitionsbereich differenzierbar und damit eine Stammfunktion zu $f = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Meistens verwendet man den Begriff der Stammfunktion natürlich umgekehrt und steht vor dem Problem zu einer gegebenen Funktion die Stammfunktion zu finden. Beweise können immer durch Einsetzen der Definition, d.h. Ableiten, erbracht werden.

1.13 Satz (Eindeutigkeit der Stammfunktion): Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, dann ist die Stammfunktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ zu $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bis auf eine additive Konstante $C \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt, d.h.

$$F(x) = G(x) + C$$

wobei $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ wieder eine Stammfunktion zu f ist.

Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung): Seien I ein offenes Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion und setzt man für ein $a, x \in I$

$$F(x) := \int_a^x f(x) dx$$

dann gilt:

- (i) In jedem Punkt $y \in \mathbb{R}$, in dem f stetig ist, ist F differenzierbar und es gilt

$$F'(y) = f(y)$$

- (ii) Falls f auf I stetig ist, dann ist F auf I differenzierbar und eine Stammfunktion zu f .
 (iii) F ist auf I Lipschitz-stetig, d.h. $\exists L \in \mathbb{R}^+ : |F(x) - F(y)| \leq L|x - y|$ für $x, y \in I$. Es gilt $L = \sup\{|f(x)| : x \in I\}$.

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf I differenzierbare und f' eine auf $[a, b] \subset I$ Riemann-integrierbare Funktion, dann definiert man

$$\int_a^b f'(x) dx := f(b) - f(a)$$

1.14 Definition (Unbestimmte Integrale): Sei f Riemann-integrierbar, dann nennt man

$$\int f(x) dx$$

ein *unbestimmtes* Integral und bezeichnet damit die Gesamtheit aller Stammfunktionen zu f . Beachte hierbei, dass es die Stammfunktion zu f immer nur bis auf eine Konstante bestimmt ist. Falls F eine Stammfunktion zu f ist, schreibt man

$$\int f(x) dx = F(x)$$

und lässt hierbei die Konstante, welche zwischen den verschiedenen Stammfunktionen zu f unterscheidet, weg. Man beachte aber, dass es sich hierbei um eine verkürzte Schreibweise handelt. Die durch unbestimmte Integration gefundene Stammfunktion ist nicht eindeutig bestimmt.

Bemerkung: Es ist ratsam zu einer gefundenen Stammfunktion den Definitionsbereich mit anzugeben.

Integriert man über einen Bereich, welcher Punkte enthält, die nicht im Definitionsbereich des Integranten liegen, ist das Integral nach unserer Definition nicht mehr wohldefiniert. Daher definiert man sich eine neue Klasse von Integralen, die sogenannten *uneigentlichen Integrale*, und einen dazugehörigen Konvergenzbegriff. Zunächst brauchen wir aber für eine saubere Definition noch den Begriff der lokalen Integrierbarkeit.

1.15 Definition (Lokale Integrierbarkeit): Man nennt eine Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Riemann-integrierbar, falls die Einschränkungen $f|_{[\alpha, \beta]}$ mit $a < \alpha \leq \beta < b$ Riemann-integrierbar sind. Man schreibt dann auch

$$\mathcal{R}_{loc}((a, b)) := \{f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} : f|_{[\alpha, \beta]} \text{ ist Riemann-integrierbar } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : a < \alpha \leq \beta < b\}$$

1.16 Definition (Uneigentliche Integrale): Seien $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$, $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine lokal Riemann-integrierbare Funktion und $x_0 \in (a, b)$, dann schreibt man *im Falle der Konvergenz*

$$\int_a^{x_0} f(x) dx := \lim_{\zeta \rightarrow a} \int_{\zeta}^{x_0} f(x) dx \quad \text{oder entsprechend} \quad \int_{x_0}^b f(x) dx := \lim_{\zeta \rightarrow b} \int_{x_0}^{\zeta} f(x) dx$$

und man nennt die Funktion f uneigentlich Riemann-integrierbar und nennt das so definierte Integral konvergent. Wie für Folgen nennt man ein nicht konvergentes uneigentliches Integral divergent. Des Weiteren schreibt man auch

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\zeta \rightarrow a} \int_{\zeta}^{x_0} f(x) dx + \lim_{\zeta \rightarrow b} \int_{x_0}^{\zeta} f(x) dx$$

Außerdem nennt man eine uneigentliches Riemann-Integral absolut konvergent, falls die uneigentlichen Integrale

$$\int_a^{x_0} |f(x)| dx, \quad \int_{x_0}^b |f(x)| dx, \quad \int_a^b |f(x)| dx$$

konvergieren.

1.17 Beispiel: Wir schauen uns ein einfaches Beispiel für ein uneigentliches Integral an. Sei $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f := \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, dann gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx &:= \lim_{\zeta \rightarrow 1} \int_0^{\zeta} \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx \\ &= 2 \lim_{\zeta \rightarrow 1} [1 - \sqrt{1-\zeta}] \\ &= 2 \end{aligned}$$

und da der Grenzwert existiert, ist das uneigentliche Integral konvergent.

1.18 Satz (Partielle Integration): Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig-differenzierbar, dann gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_{x=a}^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

1.19 Beispiel: Wir wollen folgendes Integral mit Hilfe der partiellen Integration auswerten:

$$\int \cos^2(x) dx = \sin(x) \cos(x) + \int \sin^2(x) dx = \sin(x) \cos(x) + x - \int \cos(x) dx$$

nach einer kurzen Umformung erhält man

$$\int \cos^2(x) dx = \frac{1}{2}(\sin(x) \cos(x) + x)$$

1.20 Satz (Substitutionsregel): Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $y : [a, b] \rightarrow I$ stetig-differenzierbar und streng monoton. Dann gilt

$$\int_a^b f(y(x)) \cdot y'(x) dx = \int_{y(a)}^{y(b)} f(y) dy$$

1.21 Beispiel: Wir betrachten $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := e^{\frac{x}{a}}$ und verwenden die Substitution $y(x) = \frac{x}{a}$. Dann ist y sowohl streng monoton, als auch stetig differenzierbar und wir erhalten

$$\int e^{\frac{x}{a}} \cdot \frac{1}{a} dx = \int e^y dy = e^y = e^{\frac{x}{a}}$$

und somit

$$\int e^{\frac{x}{a}} dx = ae^{\frac{x}{a}}$$

Leider ist der punktweise Limes von Riemann-integrierbaren Funktionen i.A. nicht wieder Riemann-integrierbar. Aber mit Hilfe der gleichmäßigen Konvergenz lässt sich das positive Resultat, dass der gleichmäßige Limes Riemann-integrierbarer Funktionen wiederum Riemann-integrierbar ist, erzielen.

1.22 Satz (Gleichmäßiger Limes Riemann-integrierbarer Funktionen): Gegeben sei eine Folge von Funktionen (f_n) mit $f_1, f_2, \dots : I \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, welche gleichmäßig gegen die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvergieren. Dann ist auch f Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

oder anders ausgedrückt: *Integration und gleichmäßige Konvergenz vertauschen.*

2 Lineare Gewöhnliche Differentialgleichungen

2.1 Systeme linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen

Als eine gewöhnliche DGL bezeichnet man eine Gleichung der Form (explizite Darstellung)

$$x^{(n)} = F(x^{(n-1)}, \dots, x(t), t)$$

wobei $x : \mathbb{R} \subset I \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion mit der Variablen t ist. In einer gewöhnlichen Differentialgleichung treten nur einfache Ableitung, keine partiellen Ableitungen auf. Eine DGL nennt man linear, falls man sie so umschreiben kann, dass

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) \cdot y_{(n-1)} + \dots + a_0(t) \cdot y(t) = b(t)$$

mit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und $a_j(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $j \in \{1, 2, \dots, (n-1)\}$ gilt. Die Funktion $b(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ nennt man Inhomogenität. Falls $b(t) = 0$ gilt, so nennt man die DGL homogen, anderenfalls inhomogen. Im Allgemeinen sind die Koeffizienten abhängig vom Parameter t . Beispiel (Harmonischer Oszillator): Ein klassisches Beispiel einer linearen DGL ist der harmonische Oszillator, sie lautet

$$\ddot{x} + \omega^2 \dot{x} = F_0 \cos(\Omega t) = F(t) \quad (1)$$

Sie ist ein Beispiel für eine mit der Kraft F angetriebene Schwingung (Masse auf eins normiert). Im folgenden werden vektorwertige Funktionen bzgl. des Parameters t abgeleitet und integriert. Diese Operationen sind immer komponentenweise definiert, d.h. die Ableitung eines Vektor ist gleich einem neuen Vektor, welcher die Ableitungen der Komponenten des alten Vektors enthält. Analoges gilt für die Integration. Daher lässt sich leicht zeigen, dass es zum eindimensionalen analoge Rechenregeln gibt (machen sie sich z.B. klar, dass die Produktregel gilt). Dieselben De

nitionen gelten auch für Matrizen, also

$$\dot{A}(t) = (\dot{A}_{ij}(t)), \quad \int A(t) dt = \left(\int A_{ij}(t) dt \right)$$

Als Systeme von DGL bezeichnet man

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) \quad (2)$$

mit den vektorwertigen Funktionen $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ und $\mathbf{b}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$, sowie der matrixwertigen Funktion $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$. Für diese Systeme wollen wir in den folgenden Abschnitten Lösungsmethoden bereitstellen. Jede DGL in der Darstellung (1) lässt sich in ein System von Differentialgleichungen überführen, so dass die entstehende DGL nur noch ersten Grades ist. Zu diesem Zwecke muss man die Komponenten von (2) folgendermaßen wählen:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Dadurch lassen sich alle Probleme von DGL höhere Grade auf die von DGL ersten Grades (jetzt im Matrixkalkül geschrieben) übertragen. Im Folgenden werden nur noch DGL ersten Grades in der vektoriellen Form betrachtet. Die dafür bereitgestellten Methoden gelten nach der obigen Ausführung allgemein.

1.23 Beispiel(harmonischer Oszillator): Es sei $y = (x, \dot{x})$ (beachten Sie die hier gewählte Konvention: Kommata deutet an, dass dieser Vektor als Spaltenvektor zu verstehen ist!), dann gilt:

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_0 e^{i\Omega t} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Beachtet man die Konventionen (3), dann braucht man nur einzusetzen.

Wenn ein System von DGL der Form (2) gegeben ist, so nennt man die Funktion $\mathbf{x}(t)$ eine Lösung dieses Systems. Im allgemeinen sind die Koeffizienten abhängig vom Parameter t , aber solche DGL lassen sich nur in Ausnahmefällen geschlossen lösen. Daher werden im weiteren nur lineare, gewöhnliche DGL-Systeme mit konstanten Koeffizienten betrachtet, also $a_j = \text{konst}$, $\forall j$. Hierfür lassen sich immer geschlossene Lösungen angeben.

2.2 Matrixexponentialfunktion und Lösung der homogenen DGL

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, dann definiert man

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \quad (5)$$

Dazu setzt man $A^0 = \mathbb{1}_n$ mit der n -dimensionalen Einheitsmatrix $\mathbb{1}_n$. Die Matrixexponentialfunktion hat einige wichtige Eigenschaften

1.24 Lemma Eigenschaften der Matrixexponentialfunktion): Sei $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ dann gelten:

- (i) Falls $AB = BA$, dann gilt $e^{A+B} = e^A e^B$
- (ii) Es gilt $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$
- (iii) Wenn mit $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ die n -dimensionale Diagonalmatrix mit den Einträgen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ bezeichnet wird, dann gilt $\exp(\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n})$
- (iv) $e^{B^{-1}AB} = B^{-1}AB$, falls $\det(B) \neq 0$ gilt.
- (v) $e^{-A} = (e^A)^{-1}$
- (vi) $e^{(t+s)A} = e^{tA} \cdot e^{sA}$
- (vii) $e^{A+\lambda \mathbb{1}_n} = e^\lambda \cdot e^A$

1.25 Definition (Operatornorm): Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, dann ist

$$\|A\|_0 := \sup_{v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|=1} \|Av\| \quad (6)$$

eine Norm auf dem Raum der quadratischen, komplexen Matrizen. Dieser Raum ist vollständig bzgl. dieser Norm.

1.26 Lemma: Sei $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$

- (i) $\|AB\|_0 \leq \|A\|_0 \|B\|_0$ (Submultiplikativität)
- (ii) Äquivalenz der Maximumsnorm mit der Operatornorm ($m \in \mathbb{R}$)

$$\max_{k,l \in \mathbb{N}} |A_{k,l}| \leq \|A\|_0 \leq m \cdot \max_{k,l \in \mathbb{N}} |A_{k,l}|$$

Man kann mit dieser Norm und der Submultiplikativität zeigen, dass das Matrixexponentialfunktion auf jedem beschränktem Intervall für $t \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert.

1.27 Satz (Lösung des Anfangswertproblems): Gegeben sei das homogene System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0 \quad (7)$$

Dann lautet die eindeutige Lösung dieses Anfangswertproblems (AWP)

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA} \cdot \mathbf{x}_0$$

Damit ist die Lösung des Problems auf die explizite Berechnung der Matrixexponentialfunktion übertragen worden, und im Folgenden wird gezeigt, wie man sie in bestimmten Fällen lösen kann.

1.28 Beispiel (Harmonischer Oszillator): Mit Hilfe dieses Satzes sind wir nun in der Lage die homogene DGL des harmonischen Oszillators zu lösen. Es gilt hier speziell:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Eine direkte Methode die manchmal zum Ziel führt, ist die Aufteilung der Matrixexponentialfunktion in einzelne Summen, so dass sich diese explizit berechnen lassen. Hierfür gibt es kein allgemeines Verfahren. Man benötigt dafür ein wenig Erfahrung um zu erkennen, wann dies funktioniert. Durch Matrixmultiplikation erhält man die Relationen (der Beweis dieser Gleichungen würde über vollständige Induktion erfolgen).

$$A^{2n} = (-1)^n \omega^{2n} \mathbb{1} \text{ und } A^{2n+1} = \frac{1}{\omega} (-1)^n \omega^{2n+1} A$$

Die Matrix weist also bei der Multiplikation eine gewisse "Periodizität" auf. Dies ist der Schlüssel zur hier vorgestellten Methode. Die Berechnung des Exponentials erfolgt nun als Aufteilung der Summe in gerade und ungerade Indizes:

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n} A^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1} A^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos(\omega t) \cdot \mathbb{1}_n + \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) A \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ist das homogene Problem vollständig gelöst. Was hier übertrieben wirkt (weiter unten werden wir sehen, dass die Lösung auch einfacher gefunden werden kann), soll nur als Beispiel dienen. Häufig ist dies aber der einzig adäquate Weg, ein DGL-System zu lösen. Wählen wir nun noch als Anfangsbedingung $\mathbf{y}_0 = (1, \omega)$ so erhalten wir das Ergebnis

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) + \sin(\omega t) \\ \omega(-\sin(\omega t) + \cos(\omega t)) \end{pmatrix}$$

Eine weitere grundsätzliche Methode zur Berechnung der Matrixexponentialfunktion bietet die Transformation der Matrix in Diagonalform mittels unitärer Matrizen. Dies ist nicht immer möglich, aber immer dann wenn die betrachtete Matrix selbstadjungiert (hermitesch) ist.

1.29 Rechenmethode (Berechnung mittels Diagonalisierung hermitescher Matrizen): Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine hermitesche, bzw. selbstadjungierte Matrix, d.h. $A = A^\dagger$, wobei $\dagger$ die hermitesche Konjugation bezeichnet (in Komponenten schreibt sich dies $(A_{ij})^\dagger = (\bar{A}_{ji})$). Dann gibt es eine unitäre Matrix U , so dass gilt $\tilde{A} = UAU^\dagger$. Eine Matrix nennt man unitär, wenn $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}$ gilt und es bezeichne $\tilde{A}$ die Diagonalmatrix von A . Wenn wir die Eigenwerte von A mit λ_i bezeichnen, und annehmen, dass alle Eigenwerte einfach sind, dann lässt sich schreiben:

$$e^A = U^\dagger e^{\tilde{A}} U = U^\dagger \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

Durch Ausmultiplizieren erhält man die Matrixexponentialfunktion und damit die Lösung der homogenen Gleichung. Eine quadratische $n \times n$ -Matrix ist genau dann diagonalisierbar, wenn es n linear-unabhängige Eigenvektoren gibt. Wie schon erwähnt ist dies für $A = A^\dagger$ immer gewährleistet, man braucht sich hier um dieses Problem also keine Gedanken zu machen. Im Allgemeinen sind die Eigenwerte natürlich nicht einfach, sondern es existieren mehrere Eigenvektoren zu ein und demselben Eigenwert, oder anders gesprochen der Eigenraum $\text{Eig}(A, \lambda_i)$ hat eine Dimension größer Eins. Dann tauchen die Exponentialfunktionen mit dem selben Eigenwert so häufig auf wie der Eigenwert entartet ist. Um die unitären Matrizen zu erhalten, berechnet man zunächst die Eigenwerte der Matrix, dann zu jedem Eigenwert die Eigenvektoren. Die Eigenvektoren aller Eigenwerte bilden dann die Spalten der unitären Matrix.

Diese Methode lässt sich auf alle diagonalisierbaren Matrizen anwenden (nicht nur auf $A = A^\dagger$). Im Allgemeinen Fall einer beliebigen Matrix muss man die Matrix durch eine Jordanzerlegung auf die Jordanform bringen und dann die einzelnen Matrixexponentialfunktionen mit den Jordanblöcken auswerten.

2.3 Fundamentalsystem und inhomogene Systeme

Wir gehen wiederum von der homogenen, linearen DGL (7)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$$

aus und betrachten zwei Lösungen $\mathbf{x}_1(t)$ und $\mathbf{x}_2(t)$. Dann ist $\mathbf{y}(t) = c_1 \cdot \mathbf{x}_1(t) + c_2 \cdot \mathbf{x}_2(t)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ ebenfalls eine Lösung von (7). Dies ist eine charakteristische Eigenschaft von linearen DGL und man nennt diese Eigenschaft Superpositionsprinzip. Daher ist der Raum der Lösungen ein (hier komplexer) Vektorraum der nach den Ergebnissen aus der linearen Algebra eine Basis besitzt. Diese Basis nennt man Fundamentalsystem.

Falls uns die DGL in der inhomogenen Form (2) begegnet, müssen wir uns eben dieses Superpositionsprinzip zu nutze machen. Zunächst berechnet man die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung und addiert hierzu eine spezielle Lösung der kompletten inhomogenen Gleichung. Oben hatten wir Verfahren angegeben, um homogene Lösungen zu bestimmen. Sei $\mathbf{x}(t)$ allgemeine Lösung der inhomogenen DGL und $\mathbf{x}_s(t)$ die spezielle Lösung, dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t) &:= \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_s(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) &= A(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) - A(t) \cdot \mathbf{x}_s(t) - \dot{\mathbf{x}}_s(t) = A(t) \cdot \mathbf{y}(t)\end{aligned}$$

somit ist $\mathbf{y}(t)$ ebenfalls eine Lösung der homogenen DGL. Daraus folgt, dass die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL die Form

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_s(t)$$

hat.

Ein allgemeines Verfahren um eine inhomogene DGL speziell zu lösen ist die sogenannte Variation der Konstanten, welche wir im folgenden behandeln wollen.

1.30 Rechenmethode (Variation der Konstanten): Die Lösung der homogenen Gleichung hat immer die Form $\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{c}$, mit $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^n$. Der Trick besteht jetzt darin, die "Konstante $\mathbf{c}$ " als Abhängig von der Zeit anzunehmen und den Ansatz $\mathbf{x}_s(t) = e^{tA}\mathbf{c}(t)$ zu wagen. Dann folgt mit Hilfe der Kettenregel:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_s(t) &= e^{tA}A\mathbf{c}(t) + e^{tA}\dot{\mathbf{c}}(t) = A\mathbf{x}_s(t) + \mathbf{b}(t) = e^{tA}A\mathbf{c}(t) + \mathbf{b}(t) \\ \Leftrightarrow \dot{\mathbf{c}}(t) &= e^{-tA}\mathbf{b}(t)\end{aligned}$$

Durch Integrieren und Einsetzen des Ansatzes findet man:

$$\mathbf{x}_s(t) = e^{tA} \int_{\tau}^t e^{-sA} \mathbf{b}(s) ds$$

wo man allerdings immer o.B.d.A. $\tau = 0$ annehmen kann. Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL lautet nun:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_s(t) = e^{tA}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} \mathbf{b}(s) ds \quad (8)$$

Damit ist das Problem der Integration der inhomogenen DGL gelöst.

Es existiert noch ein schnellerer Ansatz zur Lösung des homogenen Anteils von skalaren Differentialgleichung mit konstante Koeffizienten, indem man $\mathbf{x}_h(t) = e^{\lambda t}\mathbf{x}_0$ in die DGL einsetzt. Hierdurch erhält man das sogenannte charakteristische Polynom, dessen Nullstellen die benötigten Eigenwerte liefern.

1.31 Satz (charakteristisches Polynom): Für die DGL

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot x^{(n-1)} + \dots + a_0 \cdot x(t) = 0 =$$

erhält man das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

Dieses charakteristische Polynom lässt sich nun in Linearfaktoren zerlegen, also gilt:

$$P(\lambda) = \prod_{k=1}^r (\lambda - \lambda_k)^{\kappa_k}$$

wobei r die Anzahl der Nullstellen, und κ_k die Vielfachheit der k -ten Nullstelle bezeichnet (es gilt $\sum_{k=1}^r \kappa_k = n$). Die Lösung schreibt sich dann als

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^{\kappa_k} c_{k,l} t^{l-1} e^{\lambda_k t}$$

wobei $c_{k,l} \in \mathbb{C}$.

1.32 Beispiel (harmonischer Oszillator): Wie weiter oben schon angesprochen, lässt sich die DGL des harmonischen Oszillators auch einfacher lösen. Für

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

erhält man das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

welches die Lösungen $\lambda_{\pm} = \pm i\omega_0$ besitzt. Daher schreibt sich die Lösung:

$$x(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}$$

Nach Einarbeitung der Anfangsbedingungem $(x_0, \dot{x}_0) = (1, \omega_0)$ erhält man

$$\mathbf{x}(t) = \sin(\omega_0 t) + \cos(\omega_0 t)$$

was dem vorherigem Ergebnis entspricht.