Technische Universität München
Hannah Schamoni

Ferienkurs Analysis 1
Wintersemester 2010/11

Stetigkeit und Konvergenz

16.03.2011

Inhaltsverzeichnis

1 Grenzwerte von Funktionen **2**

2 Stetigkeit **3**

3 Monotone Funktionen **5**

4 Konvergenz **6**

1 Grenzwerte von Funktionen

(1) Definition. Grenzwert. Sei $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ und $y \in \overline{D}$ ein Häufungspunkt von D. Dann heißt $p \in \mathbb{C}$ **Grenzwert von f in y**, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \text{ mit } |x - y| < \delta : \ |f(x) - p| < \epsilon.$$

Offenbar ist p eindeutig. Man schreibt:

$$\lim_{x \to y} f(x) = p \quad \text{oder} \quad f(x) \overset{x \to y}{\longrightarrow} p$$

(2) Beispiel. Sei $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1}$. Dann ist $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x+2)(x-1)}{x-1} = 3.$

(3) Korollar. Folgenkriterium. $f(x) \overset{x \to y}{\longrightarrow} p \iff$ für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D \setminus \{y\}$ und $x_n \to y, \ n \to \infty,$ gilt $\lim\limits_{x \to y} f(x_n) = p$.

(4) Satz. (a) Für $f, g, h : D \to \mathbb{C}$ mit den Grenzwerten $a, b, c \in \mathbb{C}$ wie in Def. (1) und dem Häufungspunkt $y \in \overline{D}$ ist $\lim\limits_{x \to y} (f \cdot g + h) = a \cdot b + c$.

(b) Hat $k : D \to \mathbb{C}$ in $y \in \overline{D}$ den Grenzwert $p \neq 0$, so gibt es eine Umgebung $U_\delta(y)$, für die $k \neq 0$ ist. Dann besitzt die Funktion $1/k : \{x \in D : k(x) \neq 0\} \to \mathbb{C}$ für $x \to y$ den Grenzwert $1/p$.

(5) Satz. Für $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ mit $f \leq g \leq h$ und $\lim\limits_{x \to y} f(x) = \lim\limits_{x \to y} h(x) =: p$ ist auch $\lim\limits_{x \to y} g(x) = p$ (y Häufungspunkt von $\overline{D}$).

(6) Definition. Uneigentlicher Grenzwert. Sei $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{R}$ und $y \in \overline{D}$ ein Häufungspunkt von D. Man sagt **f geht gegen** ∞ $(-\infty)$ bei y, wenn

$$\forall C \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \text{ mit } |x - y| < \delta : \ f(x) \geq C \text{ (bzw. } f(x) \leq C).$$

Man schreibt:

$$\lim_{x \to y} f(x) = \infty \quad \text{oder} \quad f(x) \overset{x \to y}{\longrightarrow} \infty \quad (\text{bzw. } \lim_{x \to y} f(x) = -\infty)$$

(7) Definition. Grenzwerte bei $\pm\infty$. Es seien $a > 0$ und $f : D \to \mathbb{R}$ mit $(a, \infty) \subset D \subset \mathbb{R}$.

- Für $p \in \mathbb{R}$ definiert man $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = p \ :\Leftrightarrow \ \forall \epsilon > 0 \ \exists R > a \ \forall x \geq R : |f(x) - p| < \epsilon$.

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \;:\Leftrightarrow\; \forall C > 0\ \exists R > a\ \forall x \geq R:\ f(x) \geq C$
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty \;:\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x\to\infty} (-f)(x) = \infty$

(8) Beispiele.

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^s} = 0 \quad \forall s \in \mathbb{N}$
- Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in \{1, \ldots, k\}$, ein Polynom der Ordnung k. Ist k gerade, so gilt $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = \pm\infty$. Für k ungerade ist $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = -\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = \pm\infty$.

2 Stetigkeit

(1) Definition. Stetigkeit. Sei $D \subset \mathbb{K}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ heißt

- **stetig in** $y \in D$, falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D \text{ mit } |x - y| < \delta:\ |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

- **stetig (auf** D**)**, wenn f stetig bei allen $y \in D$ ist.

(2) Korollar. Sei f wie in (1). Dann sind für jeden Häufungspunkt $y \in D$ äquivalent:

- f ist stetig bei y.
- $\lim\limits_{x\to y} f(x) = f(y)$.
- Für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \longrightarrow y$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(y)$.

(3) Beispiel. Stetige Fortsetzung von $f(x) = \frac{1-x}{1-x}$: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1 \Rightarrow$
$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} \frac{1-x}{1-x} & x \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \\ 1 & x = 1 \end{cases}$.

(4) Satz. Rechenregeln zur Stetigkeit. Seien $D, E \subset \mathbb{K}$, $f, h : D \to \mathbb{K}$ stetig in $y \in D$, $f(D) \subset E$ und $g : E \to \mathbb{K}$ stetig in $f(y)$. Dann gilt:

- $f + h$ und $f \cdot h$ sind stetig in y.

- $g \circ f : D \to \mathbb{K}$, $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ ist stetig in y.
- $k : D \to \mathbb{C}$ sei in $y \in D$ stetig und $k(y) \neq 0$. Dann gibt es eine Umgebung $U_\delta(y)$, für die $k \neq 0$ ist und auch die Funktion $1/k : \{x \in D : k(x) \neq 0\} \to \mathbb{C}$ ist stetig in y.

(5) Satz. Sei $D \subset \mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{C}$. Dann gilt: f ist stetig $\Longleftrightarrow$ Das Urbild $f^{-1}(U)$ $(f^{-1}(A))$ jeder offenen (abgeschlossenen) Menge $U \subset \mathbb{C}$ $(A \subset \mathbb{C})$ ist wieder offen (abgeschlossen).

(6) Definition. Gleichmäßige Stetigkeit. Die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt **gleichmäßig stetig** auf D, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in D \text{ mit } |x - y| < \delta : \; |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

f heißt **Lipschitz-stetig**, wenn es eine Lipschitz-Konstante $L > 0$ gibt mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y| \;\; \forall x, y \in D.$$

Eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ erhält *Zusammenhang*, d.h. die Bildmenge $f(X)$ einer zusammenhängenden Teilmenge $X \subset D$ ist wieder zusammenhängend.
Gleiches gilt für *Kompaktheit*.

(7) Satz von Maximum und Minimum. Sei $D \subset \mathbb{K}$ kompakt und $f : D \to \mathbb{K}$ stetig. Dann nimmt f auf D sein Minimum und Maximum an, d.h. es gibt ein $x, y \in D$ mit

$$f(x) = \min_D f \quad \text{und} \quad f(y) = \max_D f.$$

(8) Zwischenwertsatz. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \neq f(b)$. Dann ist $f([a, b]) = [m, M]$ mit Minimum m und Maximum M.
Das bedeutet: $\forall y \in (m, M) \; \exists x \in (a, b)$ mitf $f(x) = y$.

(9) Beispiel. Jedes Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungerader Ordnung besitzt mindestens eine reelle Nullstelle, vgl. (3).

(10) Satz. Stetigkeit der Umkehrfunktion. Sei $D \subset \mathbb{K}$ kompakt und $f : D \to \mathbb{K}$ stetig und injektiv. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} =: g : f(D) \to \mathbb{K}$, $g(f(x)) = x \; \forall x \in D$, stetig.

Es gilt folgende Beziehung: $f : D \to \mathbb{C}$ ist Lipschitz-stetig $\Rightarrow$ f ist gleichmäßig stetig $\Rightarrow$ f ist stetig.

Ist D kompakt, gilt außerdem: f ist stetig $\Rightarrow$ f ist gleichmäßig stetig.

Im Allgemeinen folgt aus der Stetigkeit aber nicht die gleichmäßige Stetigkeit. Sei dazu $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. f ist offensichtlich stetig, aber nicht gleichmäßig stetig:
Für $\epsilon = 1$, $\delta > 0$ beliebig, $x = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\delta}{2}\right\}$ und $y = 2x$ gilt:
$|x - y| = x \;\Rightarrow\; |x - y| < \delta,\; |f(x) - f(y)| = \frac{1}{2x} \geq 1.$

3 Monotone Funktionen

(1) Definition. Monotonie. Es seien $X \subset \mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$. f heißt

- **(streng) monoton wachsend**, falls $\forall x, y \in X : \; x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ $(f(x) < f(y))$.
- **(streng) monoton fallend**, falls $\forall x, y \in X : \; x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ $(f(x) > f(y))$.
- **(streng) monoton**, falls f (streng) monoton wächst oder fällt.

(2) Korollar. Sei $X \subset \mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$ streng monoton. Dann ist f injektiv und $f^{-1} : f(X) \to X$ ist wieder streng monoton im gleichen Sinn.

(3) Korollar. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein (uneigentliches) Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ monoton. Dann gilt: f ist stetig $\iff$ $f(I)$ ist wieder ein (uneigentliches) Intervall.

(4) Satz. Seien $I \subset \mathbb{R}$ (uneigentliches) Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig.

- Ist $f(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, so gilt $f > 0$ oder $f < 0$ auf ganz I.
- f ist injektiv $\iff$ f ist streng monoton.
- f ist streng monoton $\Longrightarrow$ $f^{-1} : f(I) \to I$ ist ebenfalls stetig.

(5) Beispiel. Die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ hat keine reelle Nullstelle und ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich positiv.
Auch die Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ besitzt keine Nullstelle, aber sie ist nicht stetig bei 0 und deshalb ist $f > 0$ für $x > 0$ und $f < 0$ für $x < 0$ möglich.

4 Konvergenz

In der Analysis ist es oft wichtig zu wissen, ob Grenzprozesse vertauscht werden dürfen, d.h. ob beispielsweise Stetigkeit erhalten bleibt. Dies ist nicht selbstverständlich, wie folgendes Beispiel zeigt:
$f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ ist stetig für jedes $n \in \mathbb{N}$, aber $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ist nicht stetig, da $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$.

(1) Definition. Punktweise Konvergenz. Sei M eine Menge und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : M \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Die Funktionenfolge (f_n) **konvergiert punktweise** auf M gegen die Grenzfunktion $f : M \to \mathbb{C}$, wenn

$$\forall x \in M: \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Analog dazu sagt man, die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **konvergiert punktweise** auf M gegen $F : M \to \mathbb{C}$, falls

$$\forall x \in M: F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(x).$$

Ein stärkerer Konvergenzbegriff ist die gleichmäßige Konvergenz.

(2) Definition. Gleichmäßige Konvergenz. Sei M eine Menge und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : M \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Die Funktionenfolge (f_n) **konvergiert gleichmäßig** auf M gegen $f : n \to \mathbb{C}$ (kurz: $f_n \to f$ glm. auf M), wenn

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > N \; \forall x \in M: |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Alternative, aber gleichbedeutende Formulierung:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

(f_n) heißt **gleichmäßige Cauchy-Folge**, falls

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geq N: \sup_{x\in M} |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

Es gilt offenbar: $f_n \overset{glm.}{\longrightarrow} f \Rightarrow f_n \overset{pktw.}{\longrightarrow} f$.

(3) Satz. Sei M eine Menge und $f_n : M \to \mathbb{C}$ eine Funktion für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: (f_n) ist gleichmäßig konvergent $\Longleftrightarrow$ (f_n) ist gleichmäßige Cauchy-Folge.

(4) Satz. Konvergenzkriterium von Weierstraß. Sei M eine Menge und $f_n : M \to \mathbb{C}$ eine Funktion für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gelte:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; C_n := \sup_{x \in M} |f_n(x)| < \infty \quad \text{und} \quad \sum_{n01}^{\infty} C_n < \infty.$$

Dann ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} f_n$$

auf M gleichmäßig konvergent.

(5) Satz. Vertauschbarkeit von Limites. Seien (M, d) ein metrischer Raum, $X \subset M$, $y \in M$ ein Häufungspunkt von X und $f_n : X \to \mathbb{C}$ eine Funktion für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die Funktionenfolge (f_n) konvergiere gleichmäßig auf X gegen f und der Grenzwert

$$a_n := \lim_{x \to y} f_n(x) \in \mathbb{C}$$

sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ existent. Dann konvergiert auch die Zahlenfolge (a_n) und es gilt

$$\lim_{x \to y} f(x) = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

Dies ist gleichbedeutend zu

$$\lim_{x \to y} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to y} f_n(x).$$

(6) Korollar. Seien (M, d) ein metrischer Raum und die Funktionenfolge (f_n) mit $f_n : M \to \mathbb{C}$ gleichmäßig konvergent auf M gegen eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$.
Dann gilt: $f_n \in C(M, \mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, d.h. (f_n) ist Folge stetiger Funktionen $\Longrightarrow$ f ist ebenfalls stetig.

(7) Korollar. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in (0, \infty]$. Dann ist f auf $B_R(z_0)$ stetig.